جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جـــامـــعـــة المـــثـنـــى
كـلية التربية الاساسية
قســـم: العلوم

المرحلة:الثانية
المادة : التفاضل والتكامل
الدراسة : الصباحية والمسائية
تدريسي المادة : ا.د مرتضى محمد

محاضرات التفاضل والتكامل للعام الدراسي 2025-2026

اهداف المادة الدراسية

مفهوم الاعداد الحقيقية وخواصها والقيمة المطلقة والمتباينات وحلولها

مفهوم الدوال ،المجال والمدى والدوال المستمرة وغير المستمرة والاستمرارية المنتظمة

لاشتقاق وقواعده وبعض المبرهنات مثل مبرهنة رول والقيمة الوسطى

شتقة الدوال المثلثية والاسية واللوغارتمية

مفاهيم الاشتقاق واستخدامها للحصول على النهايات العظمى والصغرى المحلية ونقاط الانقلاب ورسم الدوال

المحاضرة الأولى: الأعداد الحقيقية

الأهداف التعليمية

بعد انتهاء المحاضرة يكون الطالب قادراً على أن:

1. يميز بين مجموعات الأعداد المختلفة .
2. يوضح العلاقة بين الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية والحقيقية .
3. يميز بين الأعداد النسبية وغير النسبية .
4. يستخدم رموز الاحتواء بين مجموعات الأعداد .
5. يحل مسائل بسيطة تتعلق بتصنيف الأعداد.

1. اهداف المقرر

اهداف المادة الدراسية

مفهوم الاعداد الحقيقية وخواصها والقيمة المطلقة والمتباينات وحلولها

مفهوم الدوال ،المجال والمدى والدوال المستمرة وغير المستمرة والاستمرارية المنتظمة

لاشتقاق وقواعده وبعض المبرهنات مثل مبرهنة رول والقيمة الوسطى

شتقة الدوال المثلثية والاسية واللوغارتمية

مفاهيم الاشتقاق واستخدامها للحصول على النهايات العظمى والصغرى المحلية ونقاط الانقلاب ورسم الدوال

2. استراتيجيات التعليم والتعلم

الاستراتيجية	- الشرح - العصف الذهني - الحوار والنقاش - الاستعانة بالمراجع والمصادر - استخدام وسائل التعليم الحديثة - تكليف الطلبة بأوراق بحثية

3. بنية المقرر

الأسبوع	الساعات	مخرجات التعلم المطلوبة	اسم الوحدة او الموضوع	طريقة التعلم	طريقة التقييم
الاول	2	مفهوم الاعداد الحقيقية وخواصها مع الامثلة	مفهوم الاعداد الحقيقية وخواصها مع الامثلة	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي
الثاني	2	المتباينات وحلولها مع الامثلة	المتباينات وحلولها مع الامثلة	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي
الثالث	2	مفهوم الدالة ،المجال والمدى مع الامثلة	مفهوم الدالة ،المجال والمدى مع الامثلة	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي
الرابع	2	الاستمرارية والاستمرارية المنتظمة مع الامثلة	الاستمرارية والاستمرارية المنتظمة مع الامثلة	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي
الخامس	2	النهايات الصغرى والعظمى مع الامثلة	النهايات الصغرى والعظمى مع الامثلة	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي
السادس	2	اختبار شهري	اختبار شهري	-	تقويم بنائي
السابع	2	مفهوم الاشتقاق وبعض المبرهنات الاساسية	مفهوم الاشتقاق وبعض المبرهنات الاساسية	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي
الثامن	2	تركيب الدوال والمشتقة من مرتبة اعلى	تركيب الدوال والمشتقة من مرتبة اعلى	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي
التاسع	2	مبرهنة رول ومبرهنة القيمة الوسطى	مبرهنة رول ومبرهنة القيمة الوسطى	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي
العاشر	2	مشتقة الدوال المثلثية مع الامثلة	مشتقة الدوال المثلثية مع الامثلة	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي
الحادي عشر	2	اختبار شهري	اختبار شهري	-	تقويم بنائي
الثاني عشر	2	مشتقة الدوال الاسية واللوغارتمية	مشتقة الدوال الاسية واللوغارتمية	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي
الثالث عشر	2	استخدام مفاهيم الاشتقاق للحصول على النهايات العظمى	استخدام مفاهيم الاشتقاق للحصول على النهايات العظمى	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي
الرابع عشر	2	رسم الدوال	رسم الدوال	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي
الخامس عشر	2	الاختبار النهائي	الاختبار النهائي	المناقشة والاستجواب	تقويم بنائي

4. تقييم المقرر	
توزيع الدرجة من 100 على وفق المهام المكلف بها الطالب مثل التحضير اليومي والامتحانات اليومية والشفوية والشهرية والتحريرية والتقارير .... الخ	
5. مصادر التعلم والتدريس	
الكتب المقررة المطلوبة	CALCULUS/ Ross L. Finney, George B. Thomas, Jr. / USA/ 1989
المراجع الرئيسة (المصادر)	حسبان التكامل والتفاضل . ترجمة الدكتور علي عزيز واخرون حسبان التفاضل والتكامل . تاليف د. عادا غسان نعوم و د. باسل الهاشمي
الكتب والمراجع الساندة التي يوصى بها (المجلات العلمية، التقارير....)	Calculus : Thomas,Jr , … الاستفادة من الدوريات والمصادر ذات الصلة بالمقرر
المراجع الإلكترونية ، مواقع الانترنيت	الاستفادة من شبكة المعلومات الدولية كمصادر معروفة

الفصل الاول
الاعداد الحقيقية

(1.1) مجموعة الاعداد

يرمز لمجموعة الاعداد الحقيقية برمز R حيث ان

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

N: Natueral Number مجموعة الاعداد الطبيعية

$$N = \{0,1,2,3 \dots\}, \qquad N^* = \{1,2,3 \dots\}$$

Z: Integers Number مجموعة الاعداد الصحية

$$Z = \{\dots -3, -2, -1,0,1,2,3 \dots\}, \qquad Z^+ = \{1,2,3 \dots\},$$
$$Z^+ = \{-1, -2, -3 \dots\}$$

Q: Rational Number مجموعة الاعداد النسبية

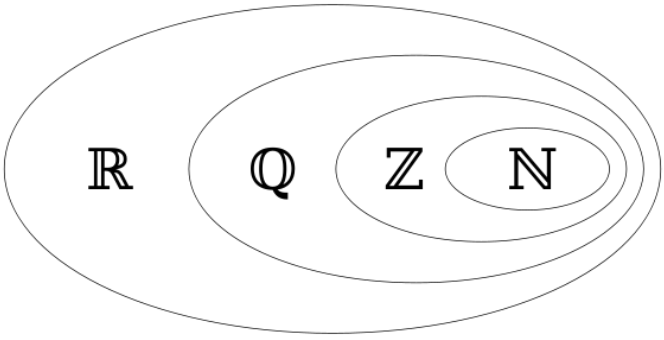
وهي مجموعة الاعداد التي تكتب بصيغة $\frac{a}{b}$ و a, b اعداد صحية و $b \neq 0$

$$Q = \left\{\frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0\right\}.$$

I: Irrational Number مجموعة الاعداد الغير النسبية

وهي مجموعة الاعداد التي لا يمكن كتابتها بصيغة $\frac{a}{b}$ا حيث a, b اعداد صحيحة و $b \neq 0$ مثل

$R = I \cup Q$ حيث $\frac{1}{3} = 0.33333$ حيث يمكن تمثيلها بعدد كسر عشري غير منتهي $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}$



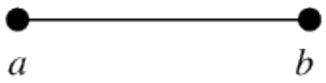
$N \subset Z \subset Q \subset R$

(2.1) الفترات

- الفترات المنتهية

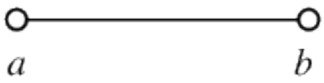
1. الفترات المغلقة

$$[a,b] = \{x; a \le x \le b\}$$



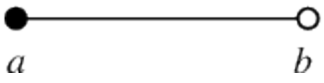
2. الفترات المفتوحة

$$(a,b) = \{x; a < x < b\}$$



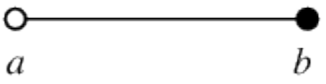
3. الفترات النصف مفتوحة

$$[a,b) = \{x; a \le x < b\},$$



Or

$$(a,b] = \{x; a < x \le b\},$$



- الفترات الغير المنتهية

$$[a,\infty) = \{x: a \le x < \infty\}$$

$$(-\infty,b] = \{x: -\infty < x \le b\}$$

$$(a,\infty) = \{x: a < x < \infty\}$$

$$(-\infty,b) = \{x: -\infty < x < b\}$$

$$(-\infty,\infty) = \{x: -\infty < x < \infty\}$$

(3.1) المتباينات

خواص المتباينات

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c, \quad \forall a, b, c \in R.$
2. $a < b \Rightarrow a.c < b.c, \quad c \in Z^+$ (عدد موجب c).
3. $a < b \Rightarrow a.c > b.c, \quad c \in Z^-$ (عدد سالب c).
4. $a < b \, , b < c \Rightarrow a < c$ (خاصية التعدي).
5. $0 < a < b$ or $a < \ b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

ملاحظة : تستخدم هذه الخواص في إيجاد مجموعة الحل لأنواع مختلفة من المتباينات. وإيجاد مجموعة الحل تعني إيجاد كل قيم x التي تحقق المتباينة.

مثال(1) : جد مجموعة الحل للمتباينات الاتية:

a) $5x - \frac{1}{2} < 4x + \frac{7}{2}$
b) $-\frac{x}{3} < 2x + \frac{5}{3}$
c) $2x - 1 < x + 3$
d) $-\frac{6}{x-1} < 5, \quad x > 1$

الحل:

a) $5x - \frac{1}{2} < 4x + \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \ 5x - 4x < \frac{1}{2} + \frac{7}{2}$ (تحويل المجاهيل في جهة والعاليم في جهة أخرى)

$\Rightarrow \ x < 4$

مجموعة الحل هي : $x \in (-\infty, 4)$

b) $-\frac{x}{3} < 2x + \frac{5}{3}$

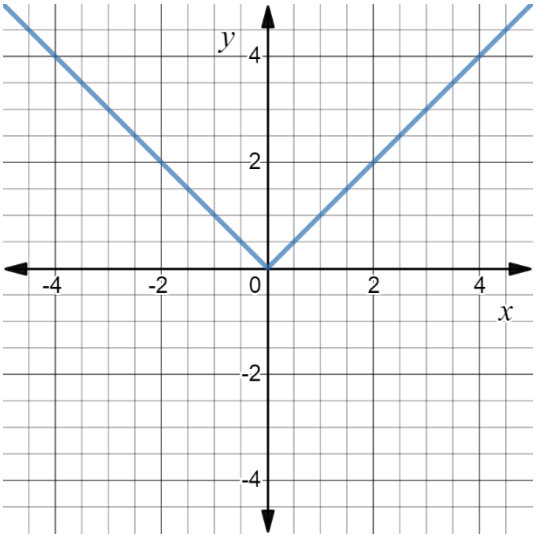
$\Rightarrow -\frac{x}{2} - 2x < \frac{5}{3} \ \Rightarrow -\frac{5x}{3} < \frac{5}{3} \Rightarrow -x < 1 \Rightarrow \ x > -1$

مجموعة الحل هي : $x \in (-1, \infty)$

(4.1) القيمة المطلقة

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

x	$y(x) = \|x\|$
-2	**2**
-1	**1**
0	**0**
1	**1**
2	**2**



ملاحظة: ان القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هو عدد حقيقي موجب (غير سالب) ومن الناحية الهندسية فإن القيمة المطلقة للعدد x هو بعد النقطة عن التي تمثل x عن نقطة الأصل أي ان :

$$|x| = \sqrt{x^2}, \quad \forall x \in R^+$$

خواص دالة القيمة المطلقة

1. $|a| \geq 0, \quad \forall a \in R.$
2. $|ab| = |a||b|, \quad \forall a, b \in R.$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \forall a, b \in R.$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|, \quad \forall a, b \in R$
5. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \ , \quad \forall a, b \in R$
6. $|a| \geq b \Longrightarrow a \leq -b \ \ or \ \ a \geq b \ , \quad \forall a, b \in R.$

مثال(2): اذا كان $y = 2, x = -3$ فجد ما يلي:

$$|x|, |y|, |x+y|, |x|+|y|, |x-y|, |x|-|y|$$

الحل:

$$|x| = |-3| = 3 \quad , \quad |y| = |2| = 2$$
$$|x+y| = |-3+2| = |-1| = 1$$
$$|x| + |y| = |-3| + |2| = 3 + 2 = 5$$
$$|x-y| = |-3-2| = |-5| = 5$$
$$|x| - |y| = |-3| - |2| = 3 - 2 = 0$$

مثال(3): جد مجموعة الحل للمتباينات الاتية:

a) $|2x-4| \leq 8$ **b)** $|2x-4| \geq 8$

الحل:

a) $|2x-4| \leq 8$

$\Rightarrow -8 \leq 2x-4 \leq 8$ (حسب خاصية 5)

$\Rightarrow -8+4 \leq 2x-4+4 < 8+4$

$\Rightarrow -4 \leq 2x \leq 12$

$\Rightarrow \frac{-4}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{12}{2}$

$\Rightarrow -2 \leq x \leq 6$

اذن مجموعة الحل هي : $x \in [-2,6]$

b) $|2x-4| \geq 8$

$\Rightarrow 2x-4 \leq -8$	or	$\Rightarrow 2x-4 \geq 8$ (حسب خاصية 5)
$\Rightarrow 2x \leq -8+4$		$\Rightarrow 2x \geq 8+4$
$\Rightarrow 2x \leq -4$		$\Rightarrow 2x \geq 12$
$\Rightarrow \frac{2x}{2} \leq \frac{-4}{2}$		$\Rightarrow \frac{2x}{2} \geq \frac{12}{2}$
$\Rightarrow x \leq -2$		$\Rightarrow x \geq 6$
$\Rightarrow x \in (-\infty, -2]$		$\Rightarrow x \in [6, \infty)$

اذن مجموعة الحل هي:

$$x \in (-\infty, -2] \cup [6, \infty) = R/(2,6)$$

Exercises (1)

I. جد ما يلي:

1) $2x - 1 < x + 3$

2) $\frac{-x}{3} < 2x + 1$

3) $\frac{6}{x-1} \geq 5\,,\ x \neq 1$

4) $|x - 5| < 9$

5) $\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1$

6) $|2x - 3| \leq 1$

7) $|2x - 3| \geq 1$

8) $|7x| = 4 + x$

II. حدد على خط الاعداد مجموعة الاعداد الاتية:

1) $x \in (-3,3) \cap \{x: x \in R, 2 < x < 3\}$

2) $x \in (-3,3) \cup \{x: x \in R, 2 < x < 3\}$

3) $x \in (-1,1) \cap \{x: x \in R, 0 < x < 4\}$

4) $x \in [-3,3] \cap (1,2)$

5) $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

الفصل الثاني

مفهوم الدوال

(1.2) المجال والمدى للدالة

تعريف: الدالة علاقة بين مجموعتين غير خالتين تسميان المجال Domain والمدى Range حيث كلا من المجال والمدى مجموعة جزئية من R بحيث كل عنصر من المجال يقابله عنصر من المدى وكل عنصر في المدى هو مقابل عنصر واحد على الأقل في المجال.

$$f: A \to B$$

مجال الدالة f يعرف بالمجموعة الاتية

$$D_f = \{x: y = f(x), x \in A\}$$

اما المدى الدالة f يعرف بالمجموعة الاتية

$$R_f = \{y: y = f(x), y \in B\}$$

ملاحظات

1) دالة متعددة الحدود التي لا تحتوي على كسر ولا جذر يكون مجال والمدى هو R .
2) الدالة الجذرية يكون مجالها هو R باستثناء القيم التي تجعل تحت الجذر عدد سالب أما المدى هو الجزء الموجب من R .
3) الدالة الكسرية يكون مجالها هو R ماعدا القيم التي تجعل المقام مساو للصفر.
4) الدالة الكسرية التي مقامها جذر يكون مجالها هو R ماعدا القيم التي تجعل تحت الجذر مساو للصفر او عدد سالب.
5) الدالة الكسرية التي بسطها عدد ثابت فان المدى هو $R - \{0\}$

مثال(1): جد المجال والمدى للدوال الاتية

1. $f(x) = x + 1$ **2.** $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ **3.** $h(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

الحل :

1. $f(x) = x + 1$

$$D_f = R = (-\infty, \infty), \qquad R_f = R = (-\infty, \infty)$$

2. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq \pm 2$$

$$D_g = [-2,2] = \{x : x \in R;\ -2 \leq x \leq 2\}$$

$$R_g = [0,2] = \{y : y \in R;\ 0 \leq y \leq 2\}$$

3. $h(x, y) = \dfrac{1}{x - 2}$

$$D_h = R - \{2\} = \{x : x \in R;\ x \neq 2\},$$

$$R_h = R - \{0\} = \{y : y \in R;\ y \neq 0\}$$

(2.2) تساوي الدوال

تعريف: يقال للدالتين انهما متساويتان إذا فقط وإذا كانتا تمتلك نفس المجال والمدى أي ان

$$\left.\begin{matrix} D_f = D_g \\ R_f = R_f \end{matrix}\right\} \Longrightarrow\ f(x) = g(x)$$

مثال(2): هل الدوال الاتية متساوية

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $\qquad g(x) = |x|$

2. $(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$, $\qquad g(x) = |x|$

الحل:

1. $\left.\begin{matrix} D_f = (-\infty, \infty), & D_g = (-\infty, \infty) \Rightarrow D_f = D_g \\ R_f = [0, \infty), & R_f = [0, \infty) \quad \Rightarrow R_f = R_g \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$

2. $\left.\begin{matrix} D_f = [0, \infty), & D_g = (-\infty, \infty) \Rightarrow D_f \neq D_g \\ R_f = [0, \infty), & R_f = [0, \infty) \quad \Rightarrow R_f = R_g \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) \neq g(x)$

(3.2) العمليات على الدوال

تعريف: اذا كانت f, g دالتين فأن

1. $(f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x)$
2. $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad g(x) \neq 0$
4. $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g$
5. $D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{g(x) \neq 0\}$
6. $D_{g/f} = D_g \cap D_f - \{f(x) \neq 0\}$

مثال (3): اذا كان $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ فجد كلا مما يأتي:

$(1)\ D_{f+g}$ $(2)\ D_{f-g}$ $(3)\ D_{f.g}$ $(4)\ D_{f/g}$ $(5)\ D_{g/f}$

الحل :

$$D_f = [0, \infty), \qquad D_g = (-\infty, \infty)$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g = [0, \infty)$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{g(x) \neq 0\} = (0, \infty)$$

$$D_{g/f} = D_g \cap D_f - \{f(x) \neq 0\} = \{x : x \in R; 0 \leq x < \infty, x \neq -1\}$$

(4.2) تركيب الدوال

تعريف: ليكن f, g دالتين فأن f تركيب g وترمز له fog تعرف كالاتي:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

يكون مجال الدالة التي تم تركيبها هو المجوعة الاتية:

$$D_{fog} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

ملاحظة : $(fog)(x) \neq (gof)(x)$

مثال(4): إذا كان $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=3x-1$ فجد كلا مما يأتي:

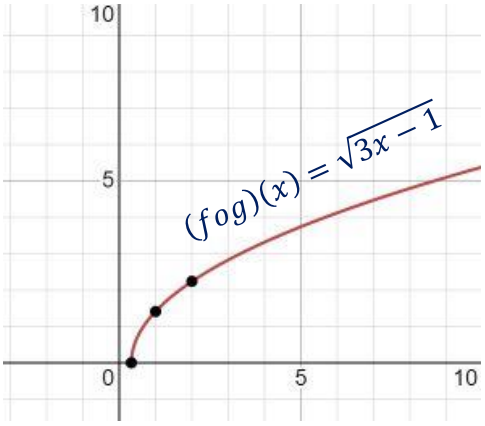
(1) fog (2) D_{fog}

(3) gof (4) D_{fog}

الحل:

(1) $(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=f(3x-1)=\sqrt{3x-1}$

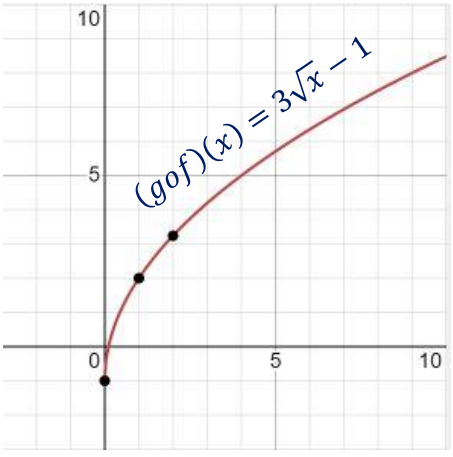
(2) $D_{fog}=\left[\frac{1}{3},\infty\right)=\left\{x: x\in R, \frac{1}{3}\le x\le\infty\right\}$



x	y
0.333	0
1	1.41
2	2.24

(3) $(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=g\big(\sqrt{x}\big)=3\sqrt{x}-1$

(4) $D_{gof}=[0,\infty)=\{x: x\in R, 0\le x\le\infty\}$



x	y
0	−1
1	2
2	3.24

(5.2) الدوال الزوجية والفردية

تعريف: يقال للدالة انها زوجية (Even Function) اذا حققت الشرط الاتي:

$$f(-x) = f(x)$$

لكل x في مجال الدالة f

تعريف: يقال للدالة انها فردية (Odd Function) اذا حققت الشرط الاتي:

$$f(-x) = -f(x)$$

لكل x في مجال الدالة f

مثال (5): أي من للدوال الاتية زوجية واي منهم فردية او لا زوجية ولا فردية

1. $f(x) = x^2$ **2.** $g(x) = x$ **3.** $h(x) = x^2 + x$

الحل:

1. $f(x) = x^2$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Longrightarrow f(-x) = f(x)$$

اذن الدالة f زوجية

2. $g(x) = x$

$$g(-x) = -x = -g(x) \Longrightarrow g(-x) = -g(x)$$

اذن الدالة g فردية

3. $h(x, y) = x^2 + x$

$$h(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$$

اذن الدالة h لا فردية ولا زوجية

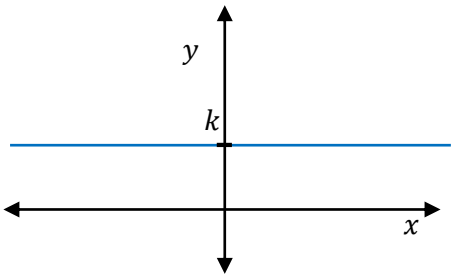
(6.2) بعض الدوال الخاصة

(1) الدالة الثابتة

$\boldsymbol{f(x) = K},\quad \forall x \in R$, عدد ثابت K

$D_f = (-\infty, \infty),$

$R_f = \{K\}$

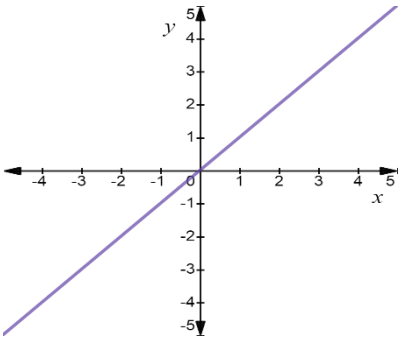


(2) الدالة الذاتية

$\boldsymbol{f(x) = x},\quad \forall x \in R,$

$D_f = (-\infty, \infty),$

$R_f = (-\infty, \infty)$

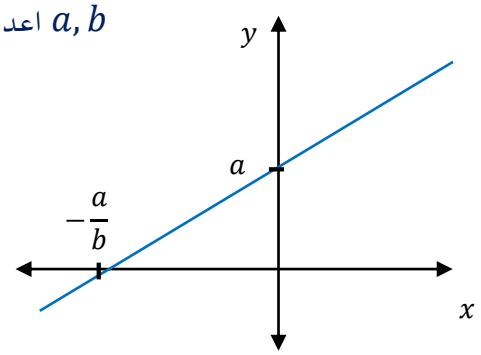


(3) الدالة الخطية

$\boldsymbol{f(x) = ax + b},\quad \forall x \in R$, اعداد ثابتة a, b

$D_f = (-\infty, \infty),$

$R_f = (-\infty, \infty)$

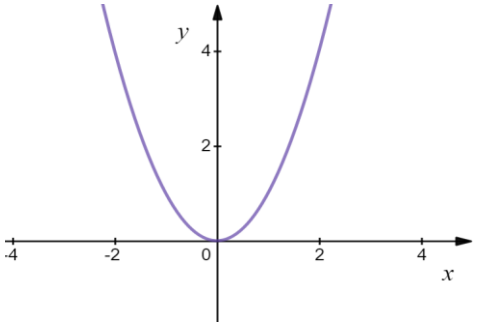


(4) الدالة التربيعية

$\boldsymbol{f(x) = x^2},\quad \forall x \in R,$

$D_f = (-\infty, \infty),$

$R_f = [0, \infty)$

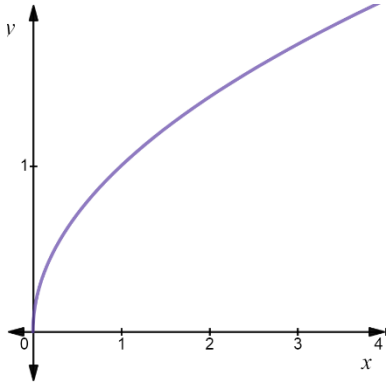


(5) دالة الجذر التربيعي

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \forall x \in R,$$

$$D_f = [0, \infty),$$

$$R_f = [0, \infty)$$

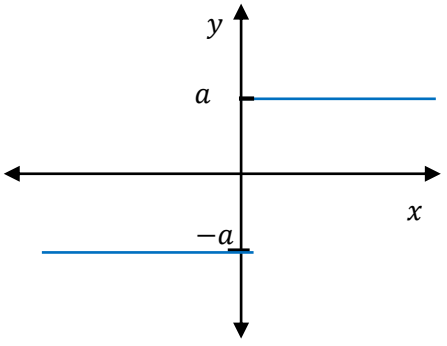


(6) دالة الإشارة

$$y(x) = \begin{cases} a & , x \geq 0 \\ -a & , x < 0 \end{cases}$$ a اعدد ثابت ,

$$D_f = (-\infty, \infty),$$

$$R_f = \{-a, a\}$$

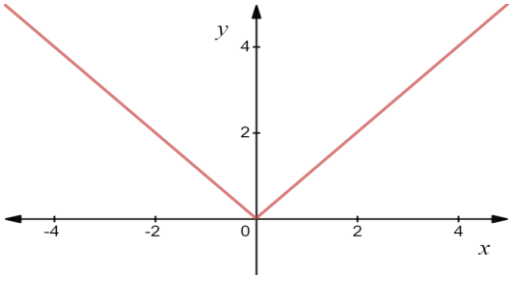


(7) دالة القيمة المطلقة

$$y(x) = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = (-\infty, \infty),$$

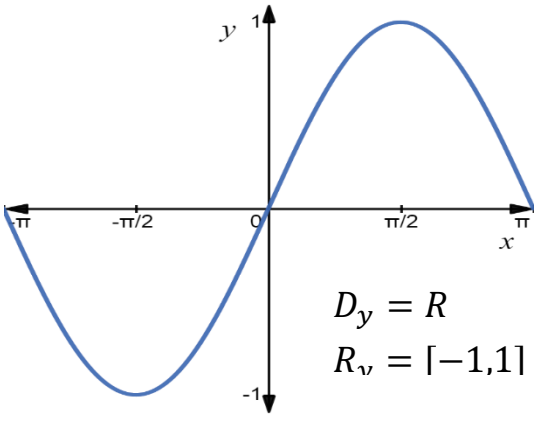
$$R_f = [0, \infty)$$



(7.2) الدوال المثلثية

(1) $y(x) = \sin x$

x	$y(x) = \sin x$
$-\pi$	$\sin(-\pi) = 0$
$-\frac{\pi}{2}$	$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
0	$\sin(0) = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$
π	$\sin(\pi) = 0$



$D_y = R$

$R_y = [-1,1]$

ملاحظة :

(1) دالة $\sin x$ هي دالة فردية أي ان $\sin(-x) = -\sin(x)$

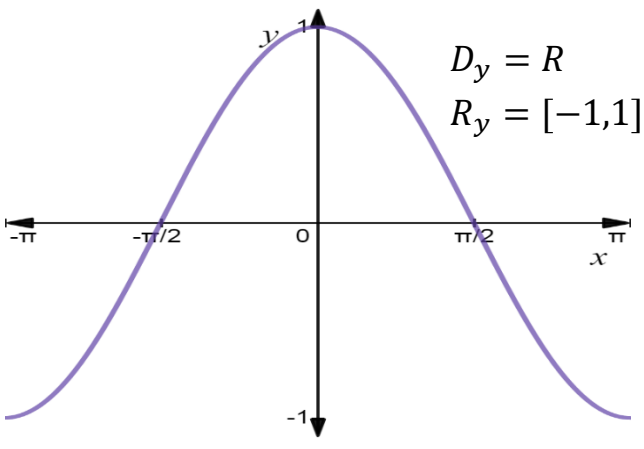
(2) دالة $\sin x$ هي دالة دورية مقدار دورتها 2π أي ان $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

(3) المجال هو مجموعة الاعداد الحقيقية $D_y = R$ المدى هو $R_y = [-1,1]$

(4) يعرف دالة $\sin x$ كنسبة مثلثية بين طول الضلع المقابل للزاوية الى طول الوتر

(2) $y(x) = \cos x$

x	$y(x) = \cos x$
$-\pi$	$\cos(-\pi) = -1$
$-\frac{\pi}{2}$	$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
0	$\cos(0) = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
π	$\cos(\pi) = -1$



$D_y = R$

$R_y = [-1,1]$

ملاحظة :

(1) دالة $\cos x$ هي دالة زوجية أي ان $\cos(-x) = \cos(x)$

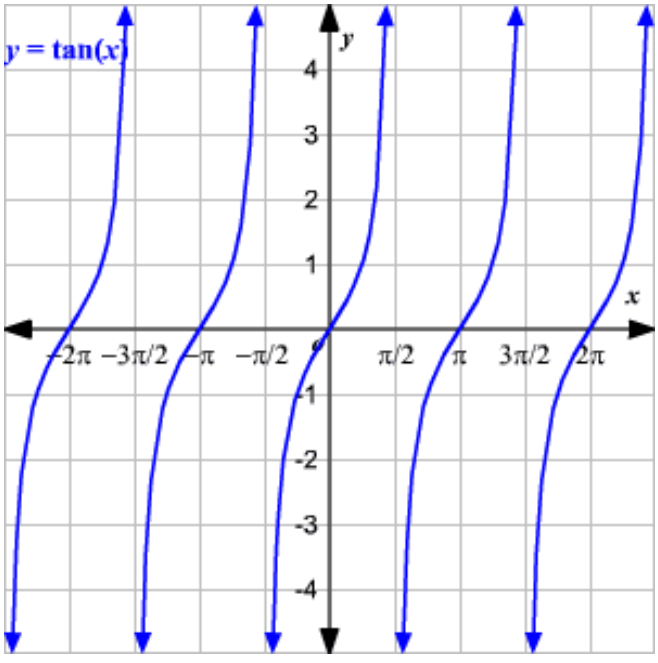
(2) دالة $\cos x$ هي دالة دورية مقدار دورتها 2π أي ان $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

(3) المجال هو مجموعة الاعداد الحقيقية $D_y = R$ المدى هو $R_y = [-1,1]$

(4) يعرف دالة $\cos x$ كنسبة مثلثية بين طول الضلع المجاور للزاوية الى طول الوتر

(3) $y(x) = \tan x$

x	$y(x) = \tan x$
$-\pi$	$\tan(-\pi) = 0$
$-\frac{\pi}{4}$	$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$
0	$\tan(0) = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$
π	$\tan(\pi) = 0$
2π	$\tan(2\pi) = 0$



ملاحظات :

(1) تعرف دالة $\tan x$ كنسبة مثلثية بين طول الضلع المقابل للزاوية الى ضلع المجاور للزاوية اوحاصل قسمة دالة $\sin x$ على الدالة $\cos x$ أي ان: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

(2) مجال دالة $\tan x$ هي مجموعة الاعداد الحقيقية ماعدا القيم التي تكون عندها الدالة $\cos x = 0$ أي ان:

$$D_y = \{\forall x \in R;\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\ ;\ n = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3, \dots\}$$

(3) مدى دالة $\tan x$ هي مجموعة الاعداد الحقيقية أي ان: $D_y = R$

(4) دالة $\tan x$ هي دالة فردية أي ان $\tan(-x) = -\tan(x)$

(5) دالة $\tan x$ هي دالة دورية مقدار دورتها π أي ان

$$\tan(x + n\pi) = \tan(x)\ ;\quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3,$$

(6) دالة $\tan x$ تكون غير معرفة عند $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ أي ان هناك محاذيات عند تلك النقط.

بعض المتطابقات للدوال المثلثية

1.	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
2.	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
3.	$\tan x = \frac{1}{\cot x}$
4.	$\sec x = \frac{1}{\cos x}$
5.	$\csc x = \frac{1}{\sin x}$
6.	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
7.	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
8.	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$
9.	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
10.	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
11.	$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$
12.	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
13.	$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
14.	$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

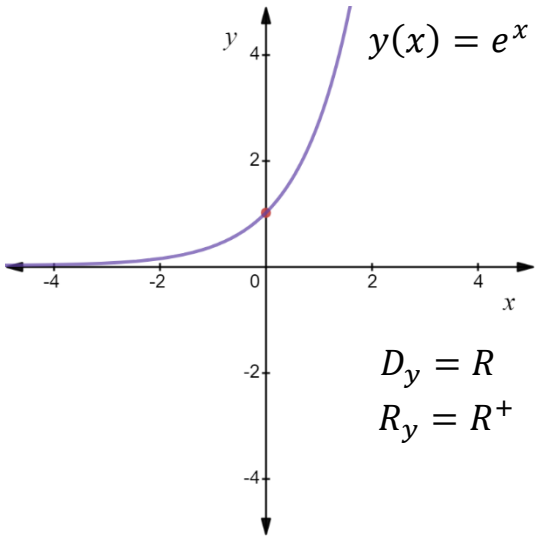
(8.2) الدوال الآسية

تعرف الدالة الاسية كما يلي

$$y(x) = exp(x) = e^x$$

حيث ان $e = 2.71828182846 \ldots\ldots$ ويقرب الى $e \approx 2.7$ أي ان العدد e كسر عشري غير منتهي وغير دوري أي ان العدد e عدد غير نسبي .

الدالة الاسية هي دالة عكسية للدالة اللوغاريتم الطبيعي. مجال الدالة الاسية هو مجموعة الاعداد الحقيقية $(D_y = R)$ ومدى هذه الدالة هو مجموعة الحقيقية الموجبة $(R_y = R^+)$ ومخططها كما يلي



خواص الدالة الاسية

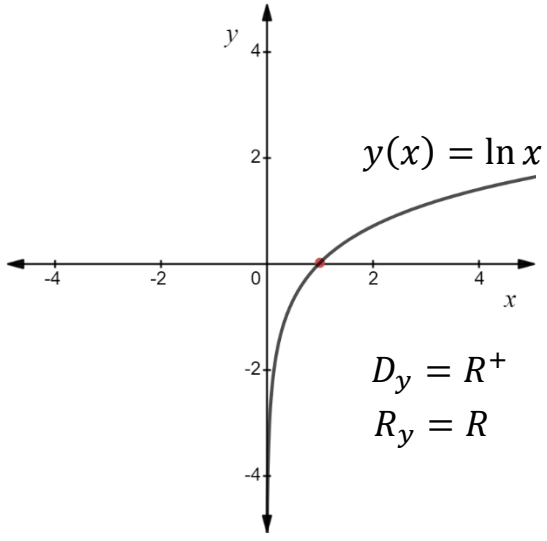
1. $e^0 = 1$
2. $e^{x+y} = e^x . e^y$
3. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
4. $(e^x)^y = e^{xy}$
5. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
6. $\text{Ln}\, e^x = x$
7. $e^{\ln x} = x$
8. $e^x \neq 0, \ \forall x \in R$

(9.2) الدوال اللوغاريتمية

يعرف اللوغاتم الطبيعي لـ x والذي يرمز له بالرمز (ln)

$$y = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt,\ \forall t > 1.$$

اذن الدالة $y = \ln x$ هي دالة اللوغارتمية مجالها مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة $(D_y = R^+)$ والمدى مجموعة الحقيقة $(R_y = R)$ و هي دالة عكسية للدالة الاسية مخطط الدالة كالاتي:



خواص دالة اللوغاريتم الطبيعي

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln e = 1$
3. $\ln(x_1.x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$
4. $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$
5. $\ln \frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = 0 - \ln x = -\ln x$
6. $\ln x^n = n \ln x$
7. $\mathrm{Ln}\, e^x = x$
8. $e^{\ln x} = x$

Exercises (2)

I. جد المجال والمدى للدوال الاتية

1. $f(x) = 4$

2. $f(x) = \sqrt{3x+1}$

3. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

4. $f(x) = \sqrt{2-x^2}$

5. $f(x) = \frac{x}{2}$

6. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

7. $y(x) = \frac{1}{x^2+2x+1}$

8. $y(x) = \ln(x-2)$

9. $y(x) = e^{1-x}$

10. $y(x) = \frac{\ln(x)}{x-2}$

11. $y(x) = \sin 30$

12. $y(x) = \ln(\sin x)$

13. $y(x) = \begin{cases} 1 & ,x \geq 0 \\ -1 & ,x < 0 \end{cases}$

14. $y(x) = \frac{1}{|x|}$

II. إذا كانت $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sqrt{x}$ جد

1. $(fog)(x)$ **2.** $(gof)(x)$ **3.** $(fof)(x)$

III. حدد فيما إذا كانت الدوال الاتية زوجية ام فردية ام لا زوجية ولا فردية

1. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

2. $g(x) = 10$

3. $y(x) = x^3$

4. $y(x) = x^4$

IV. ارسم مخطط للدوال الاتية:

1. $y(x) = |x+1|$

2. $y(x) = -x^2$

3. $y(x) = 4$

4. $y(x) = -\sqrt{x}$

5. $|\sin x|$

6. $y(x) = -|x|$

7. $y(x) = \begin{cases} 2 & ,x \geq 0 \\ -2 & ,x < 0 \end{cases}$

8. $y(x) = \begin{cases} \ln x & ,x > 1 \\ 0 & ,x \leq 1 \end{cases}$

V. إذا كانت $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$ هل ان $f = g$

الفصل الثالث

الغايات والاستمرارية

(1.3) الغايات

لتكن c نقطة في الفترة I ولتكن $f(x)$ دالة معرفة على الفترة I (قد تكون غير معرفة على النقطة c)
نقول ان الدالة $f(x)$ لها غاية L عندما x تقترب من النقطة c وتكتب

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

اذا كان لكل عدد موجب ε مهما كان صغيرا يوجد مقابله عدد موجب δ بحيث ان لكل x في منطلق f

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > o$$
$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

مثال (1): ماهي قيمة الدالة عند $x = 1$ للدالة الاتية

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)}$$

$$f(1) = \frac{(1^2 - 1)}{(1 - 1)} = \frac{(1 - 1)}{(1 - 1)} = \frac{0}{0}$$

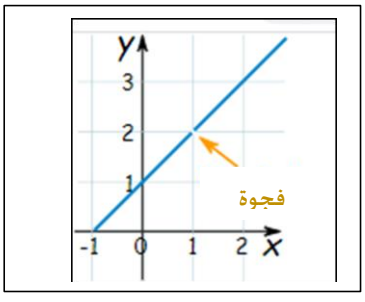
اذن لا يمكن إيجاد $f(1)$ بطريقة التعويض المباشر

x	$f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)}$
0.5	1.50000
0.9	1.90000
0.99	1.99000
0.999	1.99900
0.9999	1.99990
0.99999	1.99999
....	....

x	$f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)}$
1.5	2.50000
1.1	2.10000
1.01	2.01000
1.001	2.00100
1.0001	2.00010
1.00001	2.00001
....	....

من الجدولين أعلاه نلاحظ انه عندما x يقترب من 1 فأن الدالة f تقترب من 2 اذن

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)}$$
$$= \lim_{x\to 1} (x + 1)$$
$$= 1 + 1 = 2$$



مثال(2): إذا كان $f(x)=\frac{(x^3-1)}{(x-1)}$ جد قيمة الغاية الاتية

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

Sol:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)}{(x-1)}=\frac{0}{0}$$ (لايجوز اذن نحلل)

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-x+1)}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x^2-x+1)$$

$$=(1^2-1+1)=1$$

(2.3) بعض المبرهنات في الغايات

(1) $\lim_{x\to c}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)\pm\lim_{x\to c}g(x)$

(2) $\lim_{x\to c}[f(x).g(x)]=\lim_{x\to c}f(x).\lim_{x\to c}g(x)$

(3) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}$ (بشرط $\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$)

(4) $\lim_{x\to c}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to c}f(x)\right]^n$

(5) $\lim_{x\to c}k\,f(x)=k\lim_{x\to c}f(x)$ (حيث k عدد ثابت)

(6) $\lim_{x\to c}k=k$

(7) $\lim_{x\to c}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to c}f(x)}$

مثال: (3)

إذا كان $f(x)=\sqrt{x^3+2x^2+4x+1}$ جد قيمة الغاية الاتية

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

الحل:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3+2x^2+4x+5}=\sqrt{\lim_{x\to 2}x^3+\lim_{x\to 2}2x^2+\lim_{x\to 2}4x+\lim_{x\to 2}5}$$

$$=\sqrt{2^3+2(2)^2+4(1)+5}$$

$$=\sqrt{8+8+4+5}=\sqrt{25}=5$$

مثال(4): جد قيمة الغاية الاتية

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x^2-4}$$

الحل:

ملاحظة: بالتعويض المباشر نحصل على صفر في المقام اذن لإيجاد الغاية يجب ان نحلل البسط والمقام.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+6)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+6)}{(x+2)}$$

$$=\frac{(2+6)}{(2+2)}=\frac{8}{4}=2$$

مثال (5): جد قيمة الغاية الاتية

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-6x-7}$$

Solution:

ملاحظة: بالتعويض المباشر نحصل على صفر في المقام اذن لإيجاد الغاية يجب ان نحلل البسط والمقام.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-6x-7}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-5)}{(x-7)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-5)}{(x-7)}=\frac{(-1-5)}{(-1-7)}=\frac{-6}{-8}=\frac{3}{4}$$

مثال (6): جد قيمة الغاية الاتية

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=\sqrt{1}=1$$

مثال(7): جد قيمة الغاية الاتية

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$$

الحل:

ملاحظة: بالتعويض المباشر نحصل على صفر في المقام اذن لإيجاد الغاية يجب ان نضرب البسط والمقام بمرافق البسط.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\left(\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\left(\sqrt{x+9}\right)^2-(3)^2\right]}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$$ (فرق بين مربعين)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[x+9-9]}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0+9}+3}$$ (الان نعوض لانه لايوجد صفر بالمقام)

$$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

(3.3) غايات الدوال المثلية

مبرهنة: اذا كانت θ عدد حقيقياً و $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ فأن

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

مثال (8): جد قيمة الغاية الاتية

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 5\theta}{\theta}$$

ملاحظة: لكي يتسنى لنا تطبيق المبرهنة أعلاه نضرب البسط والمقام بمعامل الزوايا.

Solution:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 5\theta}{\theta} = \frac{5}{5} \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 5\theta}{\theta}$$

$$= 5 \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 5\theta}{5\theta} = 5(1) = 5$$

مثال (9): جد قيمة الغاية الاتية

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta}$$

Solution:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta \cos \theta} \right) = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} . \frac{1}{\cos \theta} \right)$$

$$= \left(\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \right) . \left(\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos \theta} \right)$$

$$= (1) \left(\frac{1}{1} \right) = 1$$

مثال (10): اثبت ان

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$$

الحل

ملاحظة: بالتعويض المباشر نحصل على صفر في المقام اذن لإيجاد الغاية يجب ان نضرب البسط والمقام بمرافق البسط.

$$L.H.S=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}\left(\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos^2\theta)}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\sin\theta\ \frac{\sin\theta}{\theta}\frac{1}{1+\cos\theta}\right)$$

$$=\left(\lim_{\theta\to 0}\sin\theta\right).\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right).\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{1+\cos\theta}\right)$$

$$=(0).(1).\left(\frac{1}{1+1}\right)$$

$$=0=R.H.S$$

مثال(11): اثبت ان

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\frac{1}{2}$$

الحل:

$$L.H.S = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x}{1}}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x - \cos x \sin x}{\cos x}}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \cos x \sin x}{\cos x} \frac{1}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\,(1 - \cos x)}{\cos x} \frac{1}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos^2 x)\cos x}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)\cos x}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{(1 + \cos x)\cos x}$$

$$= \left(\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{1 + \cos x}\right)\left(\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1+1}\right)\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2} = R.H.S$$

(1.3) الغايات في الملا نهاية

غاية الدالة $f(x)$ هي L عندما x تقترب من ∞ وتكتب

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

مثال(12): اذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ جد قيمة الغاية الاتية

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

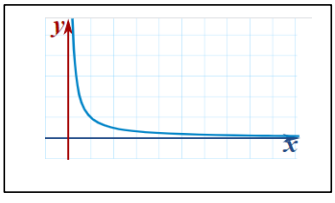
الحل:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}\quad (\text{كمية غيرمحددة})$$

x	$f(x)=\frac{1}{x}$
1	1.00000
2	0.50000
4	0.25000
10	0.10000
100	0.01000
1000	0.00100
10000	0.00010
....	....

من الجدول أعلاه نلاحظ انه عندما x يقترب من رقم كبير فأن الدالة f تقترب من كمية صغيرة اذن

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$



وبشكل عام

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x}=0$$

حيث k عدد حقيقي

مثال(13): جد قيمة الغاية الاتية

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x}{x^2+x}$$

الحل

ملاحظة: لإيجاد الغاية عندما $x\to\infty$ للدالة الكسرية نقسم البسط والمقام على المتغير x بأعلى اس .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+4x}{x^2}}{\frac{x^2+x}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{2+\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}}{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{2+0}{1+0}=2$$

مثال(14): جد قيمة الغاية الاتية

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}$$

Solution:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

Exercises (3)

I. احسب قيمة الغايات الاتية

1. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{6}{x+3}-\frac{1}{x+1}\right)$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-6x+8}{x-4}$
3. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{(x+1)^3}$
4. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

II. جد الغايات للدوال المثلثية لاتية

2. $\lim_{\theta\to 2\pi}\cos\theta$
3. $\lim_{\theta\to 0}(\tan\theta)$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{\tan x-\sin x}$

III. جد الغاية في الملانهاية الاتية

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+x^2+3x+1}{4x^3+1}\right)$

(2.3) الاستمرارية

لتكن a نقطة في الفترة I ولتكن $f(x)$ دالة معرفة على الفترة I نقول ان الدالة $f(x)$ مستمرة عندما $x = a$ اذا حققت الشروط الاتية

(1) $f(a) =$ موجودة

(2) $\lim_{x\to a} f(x) =$ موجودة

(3) $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

مثال (1) : هل الدالة $f(x) = x$ مستمرة عند النقاط الاتية $x = 2$

Sol:

(1) $f(2) = 2$ موجودة

(2) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x = 2$

(3) $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = 2$

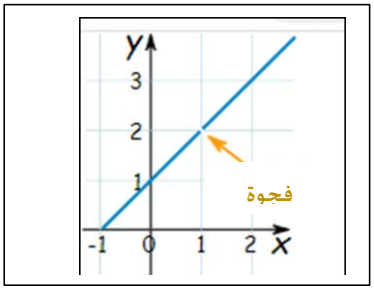
اذن الدالة $f(x) = x$ مستمرة عند $x = 2$

مثال (2) : هل الدالة مستمرة عند النقاط الاتية $x = 1$

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)}$$

Solution:

(1) $f(1) = \frac{(1^2 - 1)}{(1 - 1)} = \frac{0}{0}$ كمية غير معرفة



اذن الدالة $f(x)$ غير موجودة عند $x = 1$

اذن الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند $x = 1$

مثال (3) : هل الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ مستمرة عند النقاط الاتية $x=0$

Solution:

$$(1)\quad f(0)=\frac{1}{0}= \qquad \text{كمية غير معرفة}$$

اذن الدالة $f(x)$ غير موجودة عند $x=0$

اذن الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند $x=0$

مثال (4): هل الدالة الاتية مستمرة عند النقاط الاتية $x=1$

$$f(x)=\begin{cases} x & ,\ x=1 \\ \dfrac{1}{x-1} & ,\ x\neq 1 \end{cases}$$

Sol:

$$(1)\quad f(1)=x=1 \qquad \text{موجودة}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0}= \qquad \text{كمية غير معرفة}$$

اذن الدالة $f(x)$ ليس لها غاية عند $x=1$

اذن الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند $x=1$

مثال (5) : هل الدالة الاتية مستمرة عند النقاط الاتية $x=0$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ,\ x=0 \\ x+1 & ,\ x\neq 0 \end{cases}$$

Sol:

$$(1)\quad f(0)=0 \qquad \text{موجودة}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 1} x+1=0+1=1$$

$$(3)\quad f(0)\neq \lim_{x\to 0} f(x)$$

اذن الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند $x=0$

مثال (6) : هل الدالة الاتية مستمرة عند النقاط الاتية $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , x = 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & , x \neq 1 \end{cases}$$

Sol:

(1) $f(1) = 2$ موجودة

(2) $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} (x+1)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

(3) $$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

اذن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 1$

مثال (7): هل الدالة الاتية مستمرة عند النقاط الاتية $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & , x = 0 \\ \dfrac{\sin 5x}{x} & , x \neq 0 \end{cases}$$

Solution:

(1) $f(0) = 0 + 5 = 5$ موجودة

(2) $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

$$= 5 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}$$

$$= 5(1) = 5$$

(3) $$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 5$$

اذن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 0$

(3.3) خواص الاستمرارية

- الدالة متعددة حدود تكون مستمرة عند كل النقاط المجال.
- الدالة النسبية تكون مستمرة عند كل النقاط المجال ماعدا النقاط التي تجعل المقام يساوي صفر.
- الدالة الجذرية تكون مستمرة عند كل النقاط المجال ماعدا النقاط التي تجعل تحت الجذر التربيعي عدد سالب.
- الدالة ذات الوجهين تكون مستمرة عند كل النقاط المجال ماعدا النقاط التي تجعل التعويض المباشر لا يساوي الاقتراب.

مثال (8) : جد النقاط التي تكون فيها الدوال الاتية غير مستمرة عند ها

$$(1)\ f(x) = x^2 + \mathrm{x} + 1$$

الحل:

اذن الدالة $f(x)$ مستمرة عند جميع مجال الدالة

$$(2)\ f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 5}$$

الحل:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \ \rightarrow\ (x+1)(x-5) = 0 \rightarrow x = -1, 5$$

اذن الدالة $f(x)$ غير موجودة عند $x = -1{,}5$

اذن الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند $x = -1{,}5$

$$(3)\ f(x) = \sqrt{x-2}$$

<u>الحل:</u>

$$x - 2 \leq 0 \ \rightarrow\ x \leq 2$$

اذن الدالة $f(x)$ غير موجودة عند $\{x : x \leq 2\}$

اذن الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند $\{x : x \leq 2\}$

Exercises (4)

I. هل الدوال الاتية مستمرة عند النقاط المقابلة لها

1. $f(x)=\dfrac{(x^3-1)}{(x-1)}$, $x=1$

2. $g(x)=\begin{cases}3 & , \quad x=1\\ \dfrac{(x^3-1)}{(x-1)} & , \quad x\neq 1\end{cases}$

3. $h(x)=\begin{cases}2 & , \quad x=2\\ \dfrac{x^2+4x-12}{x^2-4} & , \quad x\neq 2\end{cases}$

4. $R(x)=\begin{cases}0 & , \quad x=0\\ \dfrac{1-\cos x}{x} & , \quad x\neq 0\end{cases}$

5. $P(x)=\tan x$, $x=\dfrac{\pi}{4}$

II. إذا كانت الدوال الاتية المستمرة فجد قيمة الثابت a

1. $f(x)=\begin{cases}a & , x=0\\ x+1 & , x\neq 0\end{cases}$

2. $g(x)=\begin{cases}x+a & , x=0\\ \dfrac{\sin 2x}{x} & , x\neq 0\end{cases}$

3. $h(x)=\begin{cases}a & , \quad x=1\\ \dfrac{x-1}{x^2-1} & , \quad x\neq 1\end{cases}$

III. جد النقاط التي تكون فيها الدوال الاتية غير مستمرة

1. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ **2.** $f(x)=\sqrt{3x+1}$ **3.** $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ **5.** $y(x)=\ln(x)$ **6.** $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}$

الفصل الرابع

الاشتقاق

(1.4) إيجاد المشتقة باستخدام التعريف

تعريف: اذا كانت الدالة $y = f(x)$ معرفة على المجال R تعرف المشتقة الدالة كما يلي

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

بشرط ان الغاية موجودة.

ملاحظة: يرمز للمشتقة ا لدالة $y = f(x)$ لالرمز $f'(x)$ أو $y'(x)$ أو $\frac{df}{dx}$ أو $\frac{dy}{dx}$

مثال (1): باستخدام التعريف جد المشتقة للدالة الاتية $y(x) = x$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - (x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 1$$

$$= 1$$

اذن $\frac{dy}{dx} = 1$

مثال (2) : باستخدام التعريف جد المشتقة للدالة الاتية $y(x) = x^2$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$
$$= 2x + 0 \ = 2x$$

اذن

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

مثال (3) : باستخدام التعريف جد المشتقة للدالة الاتية $y(x) = \sqrt{x}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \right)$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

اذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال (4) : باستخدام التعريف جد المشتقة للدالة الاتية $y(x) = \frac{1}{x}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-x-\Delta x}{(x+\Delta x)(x)}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)(x)} . \frac{1}{\Delta x}\right)$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x)(x)}$$
$$= \frac{-1}{x^2+0} = -\frac{1}{x^2}$$

اذن

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

ملاحظة :

1) ميل المماس m يساوي مشتقة الدالة عند نقطة التماس (x_1, y_1)
2) معادلة المماس هي : $(y-y_1) = m(x-x_1)$
3) معادلة العمود على المماس هي : $(y-y_1) = -\frac{1}{m}(x-x_1)$

مثال (5): جد ميل المماس للدالة الآتية: $y(x) = x^2 + 3x$ ثم جد كلا من معادلة المماس و معادلة العمود على المماس عند $(2,1)$

الحل:

$$y(x) = f(x) = x^2 + 3x$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - (x^2 + 3x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - x^2 - 3x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 3)$$

$$= 2x + 3$$

عند $x = 2$ الميل يساوي:

$$m = 2(2) + 3 = 7$$

معادلة المماس هي $(y - y_1) = m(x - x_1)$

معادلة المماس عند $(2,1)$ هي $(y - 1) = 7(x - 2)$

معادلة العمود على المماس هي $(y - y_1) = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

و معادلة العمود $(y - 1) = -\frac{1}{7}(x - 2)$

مثال (6): جد المشتقة للدالة الآتية: $y(x) = \frac{1}{x-2}$ عند $x = 1$ و $x = 3$

الحل:

$$y(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x - 2} - \frac{1}{x - 2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(x-2) - (x + \Delta x - 2)}{(x + \Delta x - 2)(x-2)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - 2)(x-2)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - 2)(x-2)}\right) \left(\frac{1}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x + \Delta x - 2)(x-2)}$$

$$= \frac{-1}{(x-2)(x-2)}$$

$$= \frac{-1}{(x-2)^2}$$

المشتقة للدالة: عند $x = 1$ هي :

$$y'(1) = \frac{-1}{(1-2)^2} = -1$$

المشتقة للدالة: عند $x = 3$ هي :

$$y'(3) = \frac{-1}{(1-3)^2} = -\frac{1}{4}$$

(2.4) قواعد الاشتقاق العامة

اذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ دوال مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) وكان A عدد ثابت فأن

1.	$y = f(x)$	$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
2.	$f(x) = A,$	$f'(x) = 0$
3.	$f(x) = Ax$	$f'(x) = A$
4.	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
5.	$f(x) = Ax^n$	$f'(x) = Anx^{n-1}$
6.	$f(x) = (g \mp h)$	$f'(x) = g'(x) \mp h'(x)$
7.	$f(x) = (g.h)(x)$	$f'(x) = g(x).h'(x) + g'(x).h(x)$
8.	$(f.g.h)'(x)$	$f'(x).g(x).h(x) + f(x).g'(x).h(x) + f(x).g(x).h'(x)$
9.	$f(x) = (g/h)(x)$	$f'(x) = \frac{h(x).g'(x) - g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}$
10.	$f(x) = (1/g)(x)$	$f'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$
11.	$f(x) = [g(x)]^n$	$f'(x) = n[g(x)]^{n-1}.g'(x)$
12.	$f(x) = (goh)(x)$	$f'(x) = g'(h(x)).h'(x)$

(3.4) قاعدة السلسة

إذا كانت $z = f(y)$ حيث ان $y = g(x)$ فأن

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx}}$$

او نعوض $z(x) = (fog)(x) = f(g(x))$ فأن

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = (fog)'(x)}$$

مثال: إذا كانت $y(x) = \sqrt{x}$ حيث $x(t) = t^2 + 1$ جد $\frac{dy}{dt}$

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=t} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.2t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

مثال: إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = x^2 - 1$ جد $(fog)'(x)\,,(gof)'(x)$

الحل:

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{1}{x^2-1} \Rightarrow (fog)'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{1}{x^2} - 1 \Rightarrow (gof)'(x) = g'\big(f(x)\big) = -\frac{2}{x^3}$$

(4.4) مشتقات من رتب عليا

إذا كانت $y = f(x)$ فأنه يرمز للمشتقات من رتب عليا كالاتي

$$y''(x)\,, \quad y'''(x), \quad y^{IV}(x), \quad y^{V}(x), \ldots$$

او بالترميز الاتي

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^4y}{dx^4}, \quad \frac{d^5y}{dx^5}$$

مثال: إذا كانت $f(x) = x^3$ جد $f^{IV}(x)$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x\,, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{IV}(x) = 0$$

Exercises (5)

(A)جد المشتقة باستخدام التعريف للدوال الآتية:

1) $y(x) = x^2 + 3x + 5$

2) $y(x) = \frac{1}{x}$

3) $y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3x}}$

5) $y(x) = x^3$

6) $f(x) = 3x^2 - 2$

7) $h(x) = \frac{1}{x^2}$

(B) جد المشتقة للدوال الاتية

1. $f(x) = 0$

2. $f(x) = \frac{\pi}{2}$

3. $f(x) = x$

4. $f(x) = 6x$

5. $f(x) = x^2$

6. $f(x) = 5x^8$

7. $f(x) = 60x^3$

8. $f(x) = 10(x^2 - 1)$

9. $f(x) = 4x^2 + 6x + 1$

10. $f(x) = x(x^7 - 3x^4)$

11. $f(x) = 10(x^3 - 5x^4)^2$

12. $f(x) = x(x^2 + 1)^4$

13. $f(x) = x^2(x^2 + 1)^4$

14. $f(x) = x^3(x^7 - 7x^4 + 6)^{10}$

15. $f(x) = (6 + x)^2(3x^2 - 1)^6$

16. $f(x) = \sqrt{2x^5 + 9}$

17. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

18. $f(x) = \sqrt[5]{x^4 + 8}$

19. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 5}$

20. $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{(3x^2 - 1)^8}$

21. $f(x) = \left(\sqrt{x} + 1\right)(x^2 + 1)^5$

21. $f(x) = \sqrt{x}(1 - x)^{10}\, x^3$

22. $f(x)=\frac{4}{x^2}$

23. $f(x)=\frac{2}{3x^6+1}$

24. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$

25. $f(x)=\frac{5}{\sqrt{(x^2+4)}}$

26. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3-4}}$

27. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-3)}$

(C) إذا كانت $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=(1-x)$ جد

1. $(fog)'(x)$
2. $(gof)'(x)$
3. $(fof)'(x)$
4. $(gog)'(x)$

(D) إذا كانت $y(x)=x^3$ حيث $x(t)=2t$ جد $\frac{dz}{dt}$

(E) إذا كانت $w=u-\tan u$ حيث $u=\pi x$ جد $\frac{dw}{dx}$

(F) إذا كانت $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$ حيث $y=\sin\theta\,,x=\cos\theta$ جد $\frac{dz}{d\theta}$ عند $\theta=\frac{\pi}{6}$

الفصل الخامس

مشتقة الدوال المتسامية

(1.5) مشتقة الدوال المثلثية

1.	$\boldsymbol{y(u) = \sin u}$	$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \cos u \ (\frac{du}{dx})}$
2.	$y(u) = \cos u$	$\frac{dy}{dx} = -\sin u \ (\frac{du}{dx})$
3.	$y(u) = \tan u$	$\frac{dy}{dx} = \sec^2 u \, (\frac{du}{dx})$
4.	$y(u) = \sec u$	$\frac{dy}{dx} = \sec u \, . \tan u \ (\frac{du}{dx})$
5.	$y(u) = \csc u$	$\frac{dy}{dx} = -\csc u \, . \cot u \, (\frac{du}{dx})$
6.	$y(u) = \cot u$	$\frac{dy}{dx} = -\csc^2 u \, (\frac{du}{dx})$

مثال (1) : اذا كان $y(x) = \sin x$ وكان

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

اثبت باستخدام التعريف ان $y'(x) = \cos x$

الحل:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos(\Delta x) + \cos x \sin(\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos(\Delta x) - \sin x + \cos x \sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \, [\cos(\Delta x) - 1] + \cos x \sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \, [\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{+ \cos x \sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \sin x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \right) + \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right)$$

بما ان

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0 \quad , \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$$

نعوض لنحصل

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sin x \ \ (0) + \cos x \ \ (1) \\ &= 0 + \cos x \\ &= \cos x \end{aligned}$$

اذن

$$y'(x) = \cos x$$

مثال (2) : اذا كان $y(x) = \cos x$ وكان

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

اثبت باستخدام التعريف ان $y'(x) = -\cos x$

الحل:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos(\Delta x) - \sin x \sin(\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos(\Delta x) - \cos x - \sin x \sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \, [1 - \cos(\Delta x)]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[1 - \cos(\Delta x)]}{\Delta x} - \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[1 - \cos(\Delta x)]}{\Delta x} \right) - \sin x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right)$$

بما ان

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0 \quad , \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$$

نعوض لنحصل

$$y'(x) = \cos x\,(0) - \sin x\,(1)$$

$$= -\sin x$$

اذن

$$y'(x) = -\sin x$$

مثال (3) : اذا كان $y(x) = \tan x$ اثبت ان $y'(x) = \sec^2 x$

الحل:

بما ان $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ اذن نشتق حسب قادة قسمة دالتين

$$y'(x) = \frac{(\cos x)\,(\cos x) - (\sin x)\,(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos x} \right)^2$$

بما ان $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$y'(x) = (\sec x)^2 = \sec^2\ x$$

اذن

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

(2.5) مشتقة الدوال الآسية واللوغاريتمية (الطبيعية والاعتيادية)

1.	$y(u) = e^u$	$\frac{dy}{dx} = e^u \left(\frac{du}{dx}\right)$
2.	$y(u) = a^u$, حيث a ثابت	$\frac{dy}{dx} = (\ln a).a^u \left(\frac{du}{dx}\right)$
3.	$y(u) = ln\|u\|$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\left(\frac{du}{dx}\right)$

مثال (1) : اذا كان $y(x) = e^x$ وكان $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$ اثبت باستخدام التعريف ان $y'(x) = e^x$

الحل:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\ &= e^x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) \\ &= e^x(1) \\ &= e^x \end{aligned}$$

اذن

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

Exercises (6)

I. جد المشتقة للدوال المثلثية والاسية الاتية

1. $y = \sin 30$ **2.** $y = \cos \pi$ **3.** $y = \tan 45$

4. $y = \sec 90$ **5.** $y = \csc 2\pi$ **6.** $y = \cot \frac{\pi}{2}$

7. $y = \sin x^2$ **8.** $y = \sin^2 x$ **9.** $y = \sin^2 x^2$

10. $y = \sin(x^2 - 1)$ **10.** $y = \cos 2x$ **11.** $y = \csc \sqrt{x}$

12. $y = \sin x \cos x$ **13.** $y = 2\sqrt{\sin x}$ **14.** $y = \csc x \,.\, \sec x \,.\, \cot x$

15. $y = \frac{1}{\tan^4 x}$ **16.** $y = \frac{1}{\sec x}$ **17.** $y = \cot^3 (\sin x)$

18. $y = e^{10}$ **19.** $y = \ln 1$ **20.** $y = \ln e^{10}$

21. $y = e^{2x}$ **22.** $y = e^{\sin x}$ **23.** $y = \sin e^x$

24. $y = \ln e^{x^2}$ **25.** $y = \ln|\sin x|$ **26.** $y = \ln x \sin x$

27. $y = 2^x$ **28.** $y = 10^{\sin x}$ **29.** $y = 2^{\ln x}$

30. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2} \sin x$ **31.** $y = \frac{1}{\ln x}$ **32.** $y(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\right)$

33. $y = \frac{e^{x^2}}{\cos x^2}$ **34.** $y(x) = \sin^4\left(\frac{1}{\ln x}\right)$

II. اذا كانت $y(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ فأثبت ان $y''(x) = -4\cos 2x$

III. جد المشتقة الثالثة f''' للدوال الاتية

1. $y = x^2$ **2.** $y = e^x$ **3.** $y = 4x^2 + 6x + 1$

4. $y = \sin x$ **5.** $y = \cos x$ **6.** $y = \csc x$

7. $y = \cot x$ **8.** $y = \tan x$ **9.** $y = \sec x$

2025-2026

محاضرة

التكامل - التكامل هي العملية العكسية للتفاضل.

تعريف: اذا كانت f مستمرة على $[a,b]$ واذا وجدت دالة F بحيث

$F'(x) = f(x)$

F متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b) ،

فان F تسمى العلاقة العكسية لتفاضل الدالة f او تكامل f غير المحدد

ويرمز له بالرمز $F(x) = \int f(x)\,dx$

ونقرأ F هو تكامل الدالة f بالنسبة للمتغير x .

التكامل ← محدد
غير محدد

يعمل على ايجاد المساحة وعمل في مجالات الكهرومغناطيسية حساب حول خط

للدالة لحساب مجسم ...

$f(x) \xrightarrow{\text{مشتقة}} f'(x)$

تكامل

$f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$

تكامل

$x^2 \xrightarrow{\text{مشتقة}} 2x + 0$

$x^2 + 5 \longrightarrow 2x + 0$

$x^2 - 3 \longrightarrow 2x + 0$

$x^2 + 3\frac{1}{2} \longrightarrow 2x + 0$

التكامل

اي بصورة عامة $x^2 + C$

2025-2026

$\cdot \quad) = x^3$

$$F(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

اي بمعنى اخر ماهي الدالة التي اذا اشتقتها تعطي x^3

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$$

Ex $g(x) = -x^7$

$$G(x) = \int -x^7 dx = -\frac{x^8}{8}$$

اي ان بصورة عامة اذا كانت $f(x) = x^n$ فيكون $n \neq -1$ فان

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

(1)

(2) تكامل الدالة مضروبة بعدد ثابت

$$(k f(x))' = k f'(x)$$

في التكامل

$$\int k f(x) = k \int f(x) dx$$

Ex $\int 5x^4 dx = 5\int x^4 dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} + c = x^5 + c$

Ex $\int -7 x^{2\frac{1}{2}} dx = -7 \frac{x^{3\frac{1}{2}}}{3\frac{1}{2}} = -2 x^{3\frac{1}{2}} + c$

٢- تكامل مجموع وطرح دالتين.

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

في الاشتقاق

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Ex $\int (x^7 + 2x^5)\,dx = \int x^7\,dx + \int 2x^5\,dx = \frac{x^8}{8} + 2\frac{x^6}{6} + c$

Ex $\int (7x^{5\frac{1}{4}} - 3x^8)\,dx = 7\,\frac{x^{6\frac{1}{4}}}{6\frac{1}{4}} - 3\,\frac{x^9}{9} + c$

٤- $\int (ax+b)^n\,dx$

$$\left((ax+b)^n\right)' = n(ax+b)^{n-1} \cdot a$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$$

Ex $\int (3x+5)^4\,dx = \frac{(3x+5)^5}{5 \cdot 3} + c$

Ex $\int \left[(-2x+7)^{5\frac{1}{2}} + 2x^3\right]dx = \frac{(-2x+7)^{6\frac{1}{2}}}{6\frac{1}{2} \cdot (-2)} + 2\frac{x^4}{4} + c$

٥- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

٦- $\int \frac{1}{x^n}\,dx = \int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$

, $n \neq 1$

$$= \int (ax+b)^{-n} dx = \frac{(ax+b)^{-n+1}}{(-n+1)a} + C$$

Ex $$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Ex $$\int \frac{1}{(3x+2)^3} dx = \int (3x+2)^{-3} dx = \frac{(3x+2)^{-3+1}}{(-3+1)3} + C$$

Ex $$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

Ex $$\int \sqrt{ax+b}\, dx = \int (ax+b)^{\frac{1}{2}} dx$$

Ex $$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx = \int (2x-3)^{-\frac{1}{2}} dx$$

تكامل الدوال المثلثية

تذكير بالاشتقاق

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$$

$$(\sin(x))' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$$

$$(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$$

التكامل لدالة كسرية:

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 + 8}{x - 2}\, dx$$

$$x^4 - 3x^3 + 8 \;\big|\; x - 2$$
$$x^4 - 2x^3 \qquad\qquad x^3 - x^2 - 2x - 4$$
$$-x^3 + 8$$
$$-x^3 + 2x^2$$
$$-2x^2 + 8$$
$$-2x^2 + 4x$$
$$-4x + 8$$
$$-4x + 8$$

$$= \int (x^3 - x^2 - 2x - 4)\, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 4x + C$$

Ex $\displaystyle\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x - 1}\, dx$

$$12x^3 - 11x^2 + 6x - 1 \;\big|\; 4x - 1$$
$$3x^2 - 2\tfrac{1}{4}x + \tfrac{15}{16}$$

الباقي $\frac{1}{16}$

$$= \int \left(\left(3x^2 - 2\tfrac{1}{4}x + \tfrac{15}{16} \right) + \frac{1/16}{4x - 1} \right) dx$$

التكامل بطريقة التعويض:

$u = x^2$

$du = 2x\, dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$

$u = x^4$

$du = 4x^3\, dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{4x^3}$

نقطة في الحالات التالية على الشكل

$f(x)\cdot f'(x)$ او $\frac{f(x)}{f^n(x)}$ او $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$

Ex $f(x) = (x^4+1)^2 x^3$

$$\int (x^4+1)^2 x^3\, dx \qquad \text{Let } u = x^4+1$$

$$du = 4x^3\, dx$$

$$\int u^2 x^3 \frac{du}{4x^3} \qquad \therefore dx = \frac{du}{4x^3}$$

$$= \int \frac{u^2}{4}\, du = \frac{1}{4}\frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{2}(x^4+1)^3 + C$$

ملاحظة

$f^n(x)$ ← تكامل ← $n f^{n-1}(x) f'(x)$ ← التفاضل

Ex $\int \frac{4x^4+24x^3+36x^2-14x-42}{2x+6}\, dx$

التكامل المحدد

Ex
$$F(x) = \int_3^4 x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C \Big|_3^4$$

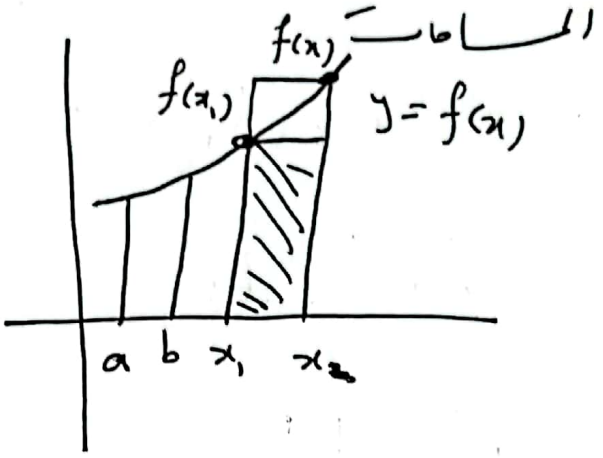
$$= \left(\frac{4^3}{3}+C\right) - \left(\frac{3^3}{3}+C\right) = \frac{64}{3} + C - \frac{27}{3} - C$$

Ex
$$\int_9^{25} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} \Big|_9^{25} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

$$\int_{-1}^{1} (2x+3)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + 3x \Big|_{-1}^{1}$$

$S(x)$ المساحة من a الى x

$S(x_1)$ المساحة من a الى x_1



$$f(x_1)(x-x_1) \leq S(x) - S(x_1) \leq f(x)(x-x_1)$$

نقسم على $(x-x_1)$

$$f(x_1) \leq \frac{S(x) - S(x_1)}{x - x_1} \leq f(x)$$

عندما $x \to x_1$

$$f(x_1) \leq S'(x_1) \leq f(x_1)$$

$$S'(x_1) = f(x_1)$$

حيث ان x_1 نقطة اعتباطية

$$S'(x) = f(x)$$

$$S(x) = \int f(x)\,dx$$

$$S(x) = F(x) + C$$

$$S(a) = F(a) + C \Rightarrow S(a) = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

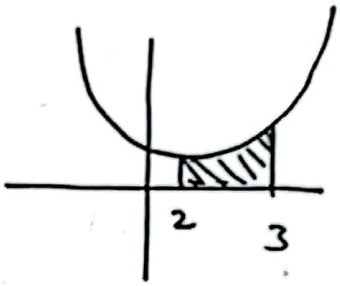
$$S(x) = F(x) - F(a)$$

$$S(b) = F(b) - F(a) \Rightarrow S = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

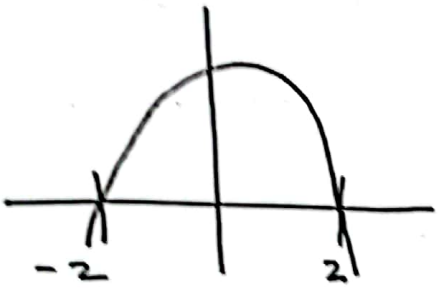
$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

المساحة المحصورة تحت الدالة من النقطة a الى النقطة b.

Ex $\int_2^3 (x^2+2)\,dx = \frac{x^3}{3} + 2x \Big|_2^3$



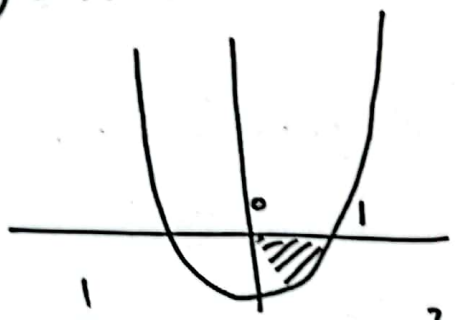
Ex $y = -x^2 + 4$



$$S = \int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,dx = \frac{-x^3}{3} + 4x \Big|_{-2}^{2}$$

Let $y=0 \Rightarrow -x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

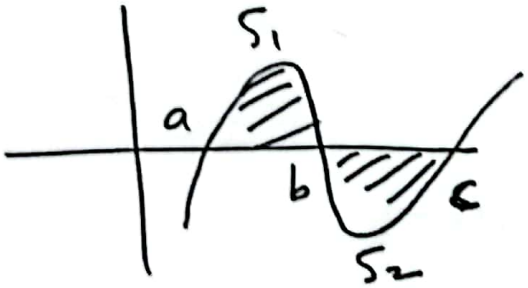
Ex $y = x^2 - 1$



$$S = \int_0^1 (x^2-1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x \Big|_0^1 = -\frac{2}{3}$$

نأخذ المطلق $\frac{2}{3}$

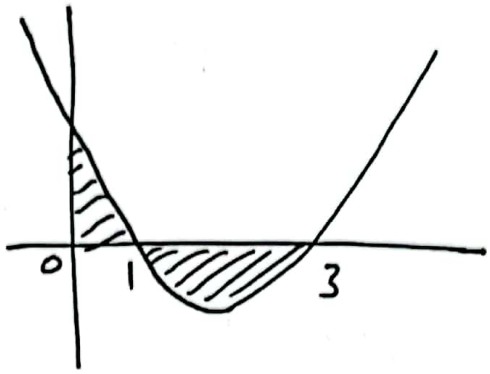
Ex



$S_1 + S_2$

2025-2026

$4x+3$



نظرية :- اذا كانت الدالة f تابلة للتكامل على $[a,b]$ واذا كانت

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

أ) f دالة زوجية فان

ب) f دالة فردية فان

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

مثال :

$$\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx = 2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2$$

مثال :

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx$$

حيث ان $f(x)=x^3$ دالة فردية

فان

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0$$

حيث ان نصف المساحة تقع تحت محور السينات

ونصفها الاخر فوق محور السينات .

2025-2026

$^{3})dx$

بما أن $f(x)$ دالة فردية

$$\int_{-1}^{1}(x-x^3)dx=0$$

Ex

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y=x^2+3x$ ومحور السينات.

(أ) الدالة ليست دالة زوجية ولست دالة فردية.

نحاول إيجاد نقط التقاطع مع محور السينات وذلك بوضع $y=0$

$$x^2+3x=0 \Rightarrow x(x+3)=0$$

$$x=0 \quad \text{أو} \quad x=-3$$

$$\int_{-3}^{0}(x^2+3x)dx=-\int_{0}^{-3}(x^2+3x)dx=-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{-3}=-\frac{9}{2}$$

الإشارة السالبة ضمنا تدل على أن المساحة المطلوبة تقع تحت محور السينات.