المنطق الرياضي

تعريف 1: المنطق الرياضي هو أحد الحقول الرياضية التي تدرس تطبيق المنطق في الرياضيات. المنطق الرياضي يستخدم بشكل واسع في علوم الحاسبات وعلوم أخرى.

تعريف 2: العبارة هي جملة خبرية والتي قد تكون صائبة ((true (T) او خاطئة ((false (F) ومن غير الممكن ان تكون العبارة صائبة وخاطئة في نفس الوقت

- يستخدم الرمز (T) للدلالة على ان عبارة ما هي عبارة صائبة
- يستخدم الرمز (F) للدلالة على ان عبارة ما هي عبارة خاطئة

مثال:- أي الجمل التالية تمثل عبارة وايها لا تمثل عبارة

1) $P: \sqrt{4} = 2$ (تمثل عبارة صائبة T)
2) $q: \sum_{x=1}^{3}(x+2) = 13$ (تمثل عبارة لكنها خاطئة F)
3) ما هو الوقت؟ (لا تمثل عبارة لأنها جمله استفهامية)

<u>**نفي العبارة**</u> <u>**(Negation of proposition)**</u> : اذا كانت p عبارة ما فيمكن ان نشتق منها عبارة أخرى بإضافة (ليس) او إضافة (ليس صحيحاً ان) قبلها وتسمى العبارة الناتجة (نفي العبارة p) ويرمز لها بالرمز (~ p) وتقرأ (ليس p) فمثلاً اذا كانت

P : النيل هو اعرض نهر في العالم

فأن نفي العبارة p هو ~p : ليس النيل اعرض نهر في العالم

ملاحظة:- اذا كانت العبارة صائبة فأن نفيها هو عبارة خاطئة و اذا كانت العبارة خاطئة فأن نفيها هو عبارة صائبة. والجدول التالي يبين قيم الصواب للعبارة ونفيها.

p	~p
T	F
F	T

*العبارات تقسم الى قسمين

1- عبارات بسيطة : العبارة تكون بسيطة اذا لا يمكن تحليلها الى عبارات ابسط (مثل 35 عدد فردي)

2- عبارات مركبة : العبارة تسمى مركبة اذا كانت تتكون من عبارتين بسيطتين او اكثر تربطهما أداة ربط واحد او اكثر (مثلا العبارة 35 عدد فردي و يقبل القسمة على 5 تكون مركبة من عبارتين بسيطتين هما 35 عدد فردي و 35 يقبل القسمة على 5 ومربطتان بأداة الربط " الواو")

أدوات الربط المنطقية logical connective operators

-1 أداة الربط (و) (^) : أي عبارتين بسيطتين pوq يمكن ربطهما بأداة الربط (و) لتكوين عبارة مركبة (p^q) . اذا كانت كل من p و q صائبة فأن p^q تكون صائبة. اذا كانت احدى العبارتين على الأقل خاطئة فأن p^q تكون خاطئة. وكما في الجدول.

p	q	P^q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال: جد قيم صدق العبارات التالية

1: 2+2=4 and 2+3 =5

(T^T =T)

2: $\frac{x}{x} = 1$ اذا كانت x≠0 ^ بغداد ليست مدينة عراقية

T^F= F

-2 أداة الربط (أو) (∨): أذا كانت كل من p و q عبارتين بسيطة تكون العبارة المركبة (p ∨ q) المرتبطة بأداة (∨) خاطئة اذا كانت كل من العبارة p و qعبارة خاطئة . وتكون العبارة (p ∨ q) صائبة فيما عدا ذلك وكما موضح في الجدول.

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال : لتكن P و q عبارات كما موضحة ادناه جد صواب العبارة (p ∨ q)

P: -3ϵN

q: x-x =0 , xϵ R

الحل: (P عبارة خاطئة (F) لان 3- عدد صحيح وليس طبيعي . q عبارة صائبة (T))

أذن p ∨ q عبارة صائبة (T)

3- أداة الربط (ذا كان ...... فأن ....) (→): اذا كانت p و q عبارتين فمن الممكن تكوين عبارة مركبة منهما باستخدام الصيغة (اذا كان .... فان ....) حيث تسمى هذه العبارات بالعباراة الشرطية ويرمز لها بالرمز (p→q) وتقرأ اذا كان p فأن q . والعبارة الشرطية (p→q) دائما صائبة الا اذا كانت p صائبة و q خاطئة.

4- أداة الربط (اذا وفقط اذا) (↔): العبارة (p↔q) ^ (q↔) تسمى عبارة ثنائية الشرط وتقرأ p اذا وفقط q ويرمز لها بالرمز (p↔q) . تكون العبارة (p↔q) صائبة تكون قيمة صدق p مساوية لقيمة صدق q وما عدا ذلك تكون خاطئة .

الجدول التالي يمثل قيم الصدق لجميع القيم المركبة الناتجة عن استخدام أدوات الربط

P	Q	P^Q	P ∨ Q	P→Q	P↔Q
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

<u>التكافؤ المنطقي logical equivalence :</u>

لتكن كل من P و Q عبارتين يقال بأن العبارة P تكافئ العبارة Q منطقيا اذا وفقط أذا كان جدول صدق P هو نفس جدول صدق Q ويرمز لذلك بالرمز P ≡ Q.

مثال:- لتكن

$\bar{p}: \sim(p \vee Q)$

$\bar{Q}: \sim p \wedge \sim Q$

فأن $\bar{p} \equiv \bar{Q}$ والجدول التالي يبين ذلك

P	Q	$p \vee Q$	$\sim(p \vee Q)$	$\sim p$	$\sim Q$	$\sim p \wedge \sim Q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

مثال :- اثبت ان العبارة ~(P→Q) تكافئ العبارة (P ∧ ~Q)

البرهان: ننشئ جدول لقيم الصواب يتضمن العبارتين كالاتي:

P	Q	~Q	P ^ ~Q	P→Q	~(P→Q)
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F

التتولوجي (تحصيل حاصل) Tautology

العبارة المركبة P تسمى تتولوجي (او تحصيل حاصل) اذا كانت P صائبة دائما مهما كانت قيم الصواب لمكوناتها

مثال: العبارة P∨(~P) تحصيل حاصل كما هو مبين في الجدول التالي

P	~P	P∨(~P)
T	F	T
F	T	T

التناقض Contradiction

اذا كانت العبارة المركبة P دائماً خاطئة مهما كانت قيم الصواب لمكوناتها فأن P تسمى تناقض.

مثال: العبارة P ^(~P) هي تناقض كما موضح بالجدول

P	~P	P^(~P)
T	F	F
F	T	F

جبر العبارات Algebra of statements

1- خواص التحايد: لتكن P عبارة فأن:
   أ: $P \vee P \equiv P$
   ب: $P \wedge P \equiv P$
2- خاصية التجميع: لتكن كل P, Q, R عبارة فان:
   أ: $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
   ب: $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$
3- خاصية التبادل:
   أ: $P \vee Q \equiv Q \vee P$
   ب: $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

4- خاصية التوزيع : لتكن كل P, Q, R عبارة فان:

أ: $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

ب: $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

5- خواص العبارات المحايدة:

أ: $P \vee O \equiv P$

ب: $P \wedge I \equiv P$

ج : $P \vee I \equiv I$

د: $P \wedge O \equiv O$

علماً ان (O رمز التناقض و I رمز النتولوجي)

6- خواص المتممات

أ: $P \vee \sim P \equiv I$

ب: $P \wedge \sim P \equiv O$

ج: $\sim(\sim P) \equiv O$

د: $\sim O \equiv I \,,\ \sim I \equiv O$

7- قوانين دي مورکن DE Morgen Laws

أ: $\sim(p \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$

ب: $\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$

يمكن برهان هذه القوانين باستخدام جداول الصدق.

سنبرهن على سبيل المثال قانون التوزيع (أ)

البرهان:

P	Q	R	Q^R	P∨Q	P∨R	P ∨ (Q ^ R)	(P ∨ Q) ^ (P ∨ R)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F	F
F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

من الجدول نستنتج:

$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

واجب: برهن قانون التجميع (أ)

المجادلات (الحجج) الصائبة Valid Arguments

المجادلة *Argument* هي مجموعة منتهية من العبارات $A_1, A_2, A3, \ldots, A_n$ البسيطة أو المركبة , تسمي مقدمات (*Premises*) أو الفرضيات، ولتكن A عبارة يمكن استنتاجها من المقدمات تسمي النتيجة ((Conclusion

نرمز للمجادلة بالرمز: $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n \vDash A$

تعريف: المجادلة $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n \vDash A$ تكون صائبة اذا لم توجد دالة v تحقق العلاقة

$$v(A_1) = v(A_2) = v(A_3) = \ldots\ldots = v(A_n) = T \wedge v(A) = F$$

ملاحظة: إذا كانت المجادلة $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n \vDash A$ غير صائبة فأننا نرمز لها بالرمز:

$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n \nvDash A$

نظرية (1): تكون المجادلة $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n \vDash A$ صائبة اذا وفقط اذا كانت العبارة : $(A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge \ldots\ldots \wedge An) \rightarrow A$ هي تحصيل حاصل أي صحيحة لكل قيم v .

مثال1: اعتبر المجادلة التالية: $p \rightarrow q, p \vDash q$ أي اذا كانت $p \rightarrow q, p$ صوابا فأن q صواباً. هل المجادلة صحيحة؟

الحل: لكي نناقش فيما اذا كانت المجادلة صائبة, ننشئ جدول الصدق التالي.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

نلاحظ ان $p \rightarrow q, q$ تكون صواباً في السطر الأول من الجدول لذلك نجد ان q صواباً. فتكون المجادلة صائبة. باستخدام النظرية (1) نكون جدول الصدق التالي.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

نلاحظ من الجدول ان العبارة $[(p \to q) \wedge p] \to q$ هي تحصيل حاصل.

يمكن إعطاء مثال يبن المجادلة السابقة كما يلي :إذا كان اليوم الجمعة، فاني لن أذهب إلى المدرسة .اليوم الجمعة، إذن لن أذهب إلى المدرسة.

مثال 2: اعتبر المجادلة التالية: $p \to q, q \to r \vDash p \to r$ (قانون القياس المنطقي) فهل المجادلة صائبة؟

الحل: نكون جدول الصدق التالي

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$p \to q \wedge q \to r$	$(p \to q \wedge q \to r) \to (p \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

نلاحظ من الجدول ان العبارة $(p \to q \wedge q \to r) \to (p \to r)$ تمثل تحصيل حاصل. اذن المجادلة صائبة.

المثال التالي يبن المجادلة السابقة كما يلي :إذا كان اليوم السبت، فان مكتبة الجامعة مفتوحة .إذا كانت مكتبة الجامعة مفتوحة، فاني سوف أراجع دروسي في مكتبة الجامعة. إذن نستنتج إذا كان اليوم السبت، فاني أراجع دروسي في مكتبة الجامعة.

واجب: اعتبر المجادلة التالية $p \to q, q \vDash p$ فهل المجادلة صائبة؟

البرهان الرياضي Mathematical proof:

هو اثبات صحة عبارة رياضية من خلال حجة او تعليل منطقي.

طرق اثبات العبارات الرياضية:

1- الاثبات المباشر للعبارة الشرطية $p\to q$: الاثبات المباشر يبدأ بالفرضية وينتهي بالاستنتاج.
تعريف: العدد الصحيح x يسمى عدد زوجي (even) إذا وجد $k\in z$ حيث $x= 2k$.
تعريف: العدد الصحيح x يسمى عدد فردي (odd) إذا وجد $k\in z$ حيث $x= 2k+1$.

نظرية: - إذا كان x عدد طبيعي فردي فأن x^2 هو عدد فردي.
البرهان: بما ان x عدد طبيعي فردي فأن

$x= 2k +1$ for $k\in N$

$x^2 = x. x= (2k+1)(2k+1)$

$= 4k^2+ 4k +1$

$= 2(2k^2+ 2k) +1$

افرض $S= 2k^2+ 2k \in N$

$\therefore x^2 = 2S+ 1$

$\therefore$ x^2 هو عدد فردي

واجب: إذا كان x عدد طبيعي زوجي فأن x^2 هو عدد زوجي

2- الاثبات المباشر للعبارة الشرطية $p\leftrightarrow q$ لأثبات فرضية على شكل $p \leftrightarrow q$ سوف نثبت مكافئ هذه العبارة: $p \leftrightarrow q = (p\to q)\wedge (q\to p)$

نظرية: x عدد فردي $\leftrightarrow$ x+1 عدد زوجي
البرهان : يجب ان نبرهن $(p\to q)\wedge (q\to p)$

1- اثبات $p\to q$: x عدد فردي نثبت x+1عدد زوجي $x= 2k+1 \quad k\in z$

$x+1= 2k+2 = 2(k+1) , \quad k+1\in z$

$x+1= 2r \quad , r= k+1 \in z$

$x+1 \in E$ (E زوجي)

2- اثبات $q\to p$: x+1 عدد زوجي نثبت ان x عدد فردي

$x+1= 2k , k\in z$

$x=2k-1$ …….. (1)

since $k\in z$ then $r= k-1$

$k= r+ 1$ ………(2)

نعوض 2 في 1

$x = 2(r+1)-1$
$x = 2r+1$
$\therefore$ عدد فردي

3- البرهان بالتناقض: هو ان نفرض عكس المطلوب اثباته ثم نحصل على التناقض مع الفرض

نظرية: اثبت إذا كان x^2 عدد فردي فأن x عدد فردي

البرهان: نفرض x عدد زوجي

$x = 2k\ ,\ k \in z$

$x^2 = 4k^2$

اذن x^2 عدد زوجي تناقض مع الفرض لأنه بالفرض x^2 عدد فردي

اذن x عدد فردي

واجب: إذا كان x^2 عدد زوجي فأن x عدد زوجي (اثبت بالتناقض)

المتغيرات

تعريف: المتغير عادة ما يرمز له بحرف ابجدي (x, y, z, … etc.) والتي تمثل عدد غير معروف

مثال:

$4x-7=5$ المتغير هو x

$\sqrt[3]{z} = 3$ المتغير هو z

الجملة المفتوحة: هي جملة تحتوي على متغير واحد او أكثر. وعادة ما يرمز لها بالرمز p(x), q(x), g(x),

مثال: هذه الجمل تمثل جمل مفتوحة

P(x): x عدد فردي

$g(x, y): x+y=5,\ x, y \in N$

مثال: لتكن الجملة المفتوحة $p(x): x > 3$ ما هي قيم الصدق $p(5), p(-1)$؟

الحل:

$P(5): 5 > 3$ صائبة

$P(-1): -1 > 3$ خاطئة

المسورات Quantifiers:

المسورات هي جمل مفتوحة مكتوبة بطريقة معينة, هناك نوعان من المسورات

1- العبارات المسورة كلياً
2- العبارات المسورة جزئياً

العبارات المسورة كلياً universal quantifiers:

لتكن $p(x)$ عبارة مفتوحة على المجموعة A $(\forall x \in A, p(x))$ هذا تسوير كلي ويقرأ لكل x ينتمي الى A هناك $p(x)$

الرمز $\forall$يسمى تسوير جزئي

مثال: $\forall x \in N, x > 0$

العبارات المسورة جزئياً Existential quantifiers:

لتكن $p(x)$ عبارة مفتوحة على المجموعة A $(\exists x \in A, p(x))$ هذا تسوير جزئي ويقرأ يوجد x حيث $p(x)$

الرمز $\exists$ يسمى تسوير جزئي

مثال : $\exists x \in N, x < 0$

نظرية المجموعات SET THEORY

تعريف 1: المجموعة هي تجمع من الأشياء المعرفة بدون ترتيب والتي تسمى بالعناصر او أعضاء تنتمي للمجموعة.

- تستخدم الاحرف الكبيرة ..... ,A,B,X,Y لتدل على المجموعة والحروف الصغيرة ...x,y,a,b, لتدل على عناصر المجموعة.
- انتماء عنصر (a) للمجموعة (A) يعبر عنه رياضياً $(a \in A)$

طرية التعبير عن المجموعة: هناك طريقتان للتعبير عن المجموعة:

1- الطريقة الجدولية tabulation method

في هذه الطريقة نستخدم الاقواس المعقوفة لتسمية المجموعات فمثلا مجموعة ألوان العلم العراقي يمكن التعبير عنها بالشكل {أبيض, أحمر, أخضر, أسود} ومجموعة الاعداد 3,4,7,9 يمكن التعبير عنها بالشكل { 3,4,7,9} والمجموعة {a,b} تحوي العناصر a,b.

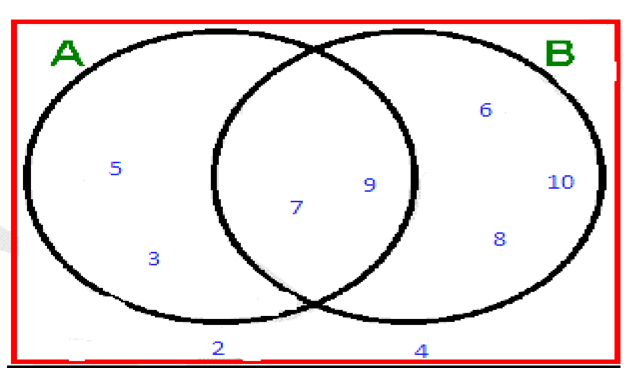
2- طريقة القاعدة Rule method

وتسمى احياناً طريقة الصفة المميزة, في هذه الطريقة تعين خاصية تمتلكها جميع الأشياء في المجموعة ولا يمتلكها سواها فيعبر عن المجموعة بذكر هذه الخاصية فمثلاً مجموعة جميع الاعداد الصحيحة التي مربعها اقل من 3 ممكن كتابتها بالصورة التالية:-

{x: $x^2<3$,عدد صحيح x}

3- مخططات فن venn diagram

في هذه الطريقة توضع العناصر داخل منحني مغلق يمثل المجموعة وتستخدم هذه الطريقة لأغراض توضيحية فقط.



ملاحظة: تسمى المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر مجموعة خالية (empty set) ويرمز لها بالرمز ø

مثال 1: $A = \{x\in N: 2< x< 3\} = ø$

مجموعات هامة:

1- مجموعة الاعداد الطبيعية (Natural number) : ويرمز لها بالرمز N $N= \{1,2,3,\ldots\}$
2- مجموعة الاعداد الصحيحة (Integers) : ويرمز لها بالرمز Z $Z=\{\ldots,-2, -1, 0, 1, 2,\ldots\}$
3- مجموعة الاعداد الحقيقية (Real number) ويرمز لها بالرمز R

المجموعات الجزئية subsets:

تعريف 2: لتكن A مجموعة ولتكن B مجموعة يقال ان A مجموعة جزئية من B اذا وفقط اذا كل عنصر في A يكون ايضاً عنصر في B ويعبر عن ذلك بالرمز $A\subset B$. ويقال في هذه الحالة ان (A محتوى في B) او ان (B يحتوي A).

ملاحظة: اذا كانت A مجموعة غير جزئية من B فنرمز لذلك بالرمز $A\not\subset B$

مثال 2: اذا كانت $A= \{ x: -3< x <3 , x\in Z\}$

فأن A مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الصحيحة Z أي ان $A\subset Z$

لاحظ ان A لا تكون جزء من مجموعة الاعداد الطبيعية N أي ان $A\not\subset N$.

مثال 3: اذا كانت $A= \{ 2,3,5,17,21\}$ و $B= \{ x: x^2 -4 =0 , x\in N\}$ هل ان $B\subset A$؟

الحل: نقوم باستخراج عناصر B من خلال حل المعادلة

$X^2- 4 =0$

$X^2= 4$

$X= 2 \quad (x\in N)$

$B= \{2\}$

Then $B\subset A$

تعريف 3: لتكن كل من A,B مجموعة يقال ان A مجموعة جزئية من فعلية من لا اذا وفقط اذا:

1- A مجموعة جزئية من B
2- يوجد عنصر واحد على الأقل في B غير موجود في A.

الفترات Intervals:

ليكن كل من a, b عدداً حقيقياً:

1- المجموعة $\{x: a < x < b, x \in R\}$ تسمى فترة مفتوحة open interval ويرمز لها بالرمز (a, b).
2- المجموعة $\{ x: a \leq x \leq b , x \in R\}$ وتسمى فترة مغلقة closed interval ويرمز لها بالرمز [a , b].
3- المجموعة $\{ x: a < x \leq b , x \in R\}$ تسمى فترة نصف مفتوحة من اليسار half open interval from left ويرمز لها بالرمز (a, b].
4- المجموعة $\{ x: a \leq x < b , x \in R\}$ تسمى فترة نصف مفتوحة من اليمين half open interval from right ويرمز لها بالرمز [a, b)

تساوي المجموعات Equality of sets:

تعريف 4: ليكن كل من A, B مجموعة يقال ان A=B اذا وفقط اذا كان كل من A, B يرمز للمجموعة نفسها

ملاحظة : اذا كانت A=B فهذا يعني:

1- A,B رمزان لمجموعة واحدة
2- A, B تتكون بالضبط من نفس العناصر
3- $A \subset B, B \subset A$

مثال 4 : لتكن $A=\{ x: x^2-1=0 , x \in R\}$ و لتكن $B=\{-1,1\}$ فأن A=B برهن ذلك.

البرهان: لاستخراج عناصر A نحل المعادلة

$X^2-1=0$

$X^2=1$

$X=\mp 1$

$A=\{1,-1\}$

Then $A=B$

واجب: لتكن $A=\{x: x^2-2x+1=0 , x\in R\}$ و $B=\{1,2\}$ هل ان $A=B$؟

جبر المجموعات:

اتحاد وتقاطع المجموعات Union and intersection of sets

تعريف 5: اذا كانت كل من A , B مجموعة فأن:

1- A اتحاد B هي مجموعة العناصر التي تنتمي الى A او الى B او كليهما ويرمز له بالرمز $A\cup B$.

$$\mathbf{A\cup B=\{x: x\in A \vee x\in B\}}$$

2- A تقاطع B هي مجموعة العناصر المشتركة بين A و B ويرمز له بالرمز $A\cap B$.

$$\mathbf{A\cap B=\{x: x\in A \wedge x\in B\}}$$

مثال5:

1- لتكن $A=\{0,2\}$ ولتكن $B=\{1,3\}$ فأن :

$A\cup B=\{0,1,2,3\}$

$A\cap B=\emptyset$

2- لتكن $A=\{x\in R: x\geq 5\}$ ولتكن $B=\{x\in R : x<6\}$ فأن

$A\cup B=R$

$A\cap B=[5,6)$

مبرهنة 1: لتكن كل من A و B مجموعة فأن $A \subset A \cup B$.

البرهان: لتكن $x \in A$

$x \in A \rightarrow x \in A \vee x \in B$

$x \in A \cup B$

then $A \subset A \cup B$

مبرهنة 2: لتكن كل من A و B مجموعة فأن $A \cap B \subset A \wedge A \cap B \subset B$.

البرهان: نبرهن ان $A \cap B \subset B$

لتكن $x \in A \cap B$

$x \in A \cap B \rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\rightarrow x \in B$

Then $A \cap B \subset B$

وبنفس الطريقة نبرهن ان $A \cap B \subset B$

<u>المجموعتان المنفصلتان Disjoint sets</u>

تعريف 6: يقال بأن المجموعتين A و B منفصلتان اذا وفقط اذا لا توجد عناصر مشتركه بينهما وبعبارة أخرى ان تقاطعهما مجموعة خالية. ($A \cap B = \emptyset$)

مثال6: لتكن A: مجموعة الاعداد الطبيعية الزوجية.

لتكن B: مجموعة الاعداد الطبيعية الفردية.

اذن A, B مجموعتان منفصلتان لان: $A \cap B = \emptyset$

ملاحظة: اذا لم تكن المجموعتان A,B منفصلتين فأنهما متصلتان (Joint)

<u>متممة المجموعة complement of a set</u>

تعريف 7: لتكن A مجموعة ما فأن المجموعة المتممة ل A هي المجموعة التي عناصرها من المجموعة الشاملة U والتي لا تنتمي الى A ويرمز لها بالرمز A^c.

لاحظ ان $A^c \subset U$ حيث $A^c = \{ x \in U: x \notin A\}$

مثال 7: لتكن X المجموعة الشاملة حيث: $X= \{1,2,3,4,5,6\}$ ولتكن $A \subset X$ بحيث ان $A= \{ 2,4,6\}$
فأن متممة المجموعة A هي $A^c = \{ x \in X: x \notin A\}$ اذن $A^c = \{ 1,3, 5\}$

مبرهنة 3: لتكن كل من A,B مجموعة فأذا كانت $A \subset B$ فأن $B^c \subset A^c$

البرهان:

نفرض ان $x \in B^c$

$\rightarrow x \notin B$ (حسب تعريف المتممة)

$\rightarrow x \notin A$

$\rightarrow x \in A^c$ (تعريف المتممة)

$\therefore B^c \subset A^c$

مبرهنة 4: لتكن A مجموعة ما فأن $(A^C)^C = A$

البرهان: نبرهن أولاً ان $(A^C)^C \subset A$

نفرض ان $x \in (A^C)^C$

(حسب تعريف المتممة) $\rightarrow x \notin A^C \rightarrow x \in A$

$\therefore (A^C)^C \subset A \ldots\ldots\ldots.. (1)$

الان نبرهن $A \subset (A^C)^C$

نفرض ان $x \in A$

(حسب تعريف المتممة) $\rightarrow x \notin A^C \rightarrow x \in (A^C)^C$

$\therefore A \subset (A^C)^C \ldots\ldots\ldots.. (2)$

من (1) و (2) نحصل على $(A^C)^C = A$

the Relations العلاقات

تعريف 1: يقال عن x انه زوج مرتب اذا وجد شيئين a, b بحيث ان $x= (a,b)$ فيقال ان a المسقط الأول للزوج المرتب x ويقال عن b انه المسقط الثاني للزوج المرتب x.

الضرب الديكارتي Cartesian product:

تعريف 2: لتكن كل من A, B مجموعة فأن حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين A,B هو مجموعة عناصرها جميع الأزواج المرتبة (a, b) حيث $a\in A$ و $b\in B$ ويرمز له بالرمز AxB. وبعبارة أخرى

$AxB= \{(a,b): a\in A \wedge b\in B\}$

مثال1: لتكن $A= \{1,3,5\}$ و $B= \{ -2,4\}$ جد AxB , BxA

الحل:

$AxB= \{(1, -2), (1,4), (3,-2), (3,4), (5,-2), (5,4)\}$

$BxA = \{(-2,1), (-2, 3), (-2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$

Note that: $AxB \neq BxA$

العلاقة the relation:

تعريف 3: لتكن كل من A,B مجموعة فأن اية مجموعة جزئية من AxB تسمى علاقة فاذا اعتبرنا R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B فأن $R \subset AxB$

ملاحظة: سيعبر عن العلاقة باعتبارها مجموعة بأحدى الطريقتين اما الجدولية بذكر عناصرها او بطريقة الصفة المميزة فتكتب كما يلي $R = \{(x, y): x\in A, y\in B, p(x, y)\}$ حيث $p(x,y)$ هي صفة مميزة لعناصرها.

ملاحظة: اذا كان (x,y) عنصرا في R فأننا نعبر عن هذا الانتماء بالرمز xRy ويقرأ (x يرتبط مع y بالعلاقة R)

تعريف 4: إذا كانت $A=B$ فأن R تسمى علاقة على A عندئذ Rتكون مجموعة جزئية من AxA.

مثال 2: لتكن $A=\{1,5\}$ و $B=\{2,4,6\}$ فأن المجموعة $R=\{(x,y): (x<y)\}$ هي علاقة من A الى B $R=\{(1,2), (1,4), (1,6), (5,6)\}$ لاحظ ان $R \subset A \times B$

مثال 3: لتكن $A=\{1,2,3\}$ ولتكن R علاقة على A بحيث ان $R=\{(x,y) : x,y \in A , x+y \leq 4\}$ جد عناصر R.

الحل: بما ان R علاقة على A اذن $R \subset A \times A$ حيث ان :

$AxA=\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1),(2,2) , (3,1)\}$

العلاقة الذاتية Identity relation:

تعريف 5: لتكن A مجموعة ما تسمى المجموعة التي عناصرها جميع الأزواج المرتبة (x,y) في AxA حيث $x=y$ ب (العلاقة الذاتية على A ويرمز لها بالرمز I_A).

أي ان $I_A = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in A , x=y\}$

مثال 4: اذا كانت $A=\{a, b, c, d\}$ فأن $I_A=\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

مثال 5: اذا كانت $A=N$ فأن $I_N = \{(x, y): x, y \in N , x=y\}$ اذن $I_N=\{(0,0), (1,1), (2,2),\ldots\}$

عكس العلاقة Inverse relation:

تعريف 6: لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B تسمى العلاقة من B الى A التي عناصرها هو جميع الأزواج المرتبة (y, x) حيث $(y, x) \in R$ (عكس العلاقة) ويرمز لها بالرمز R^{-1}. أي ان $R^{-1}=\{(y, x): (x, y) \in R\} \subset BxA$

مثال6: لتكن $A=\{2, 4, 5\}$ و $B=\{a, b\}$ اذا كانت R علاقة من A الى B بحيث ان

$R=\{(2, a), (5, b), (4, b)\}$

فأن:

$R^{-1}=\{(a, 2), (b, 5), (b, 4)\}$

Type of relation أنواع العلاقات

1- **العلاقة الانعكاسية Reflexive Relation:** لتكن R علاقة على المجموعة A فتسمى R علاقة انعكاسية اذا كان $\forall x \in A, (x, x) \in R$

ملاحظة: اذا كانت R علاقة انعكاسية على المجموعة A فأن العلاقة الذاتية I_A تكون مجموعة جزئية من R أي ان $I_A \subset R$

2- **العلاقة المتناظرة Symmetric Relation:** لتكن R علاقة على المجموعة A تسمى R علاقة متناظرة اذا كان: $\forall x, y \in A, \text{ if } (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$

3- **العلاقة المتعدية Transitive Relation:** لتكن R علاقة على المجموعة A فتسمى R علاقة متعدية اذا كان $\forall x, y, z \in A \text{ if } (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

4- **العلاقة ضد متناظرة Anti- symmetric Relation:** لتكن R علاقة على المجموعة A فأن R تسمى علاقة ضد متناظرة اذا كان: $\forall (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x=y$

ملاحظة: اذا كانت العلاقة R ليست متناظرة هذا لا يعني انها بالضرورة ضد متناظرة.

امثلة: لتكن $A =\{ 0,1,2,3,4,5,6,7\}$ فاذا كانت R علاقة على A بحيث ان:

1- $R_1= \{ (x, y): y-x \in A\}$
2- $R_2= \{(x,y): y-x = 1\}$
3- $R_3= \{(x, y): x-y> 1\}$
4- $R_4= \{(x, y): x+y\leq 14\}$

أي من العلاقات أعلاه تناظرية، ضد متناظرة، انعكاسية، متعدية؟

الحل :

1- $R_1= \{(x,y): y-x\in A\}$

$R_1=\{ (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (0,1), (0,2), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,5), (4,6) , (4,7), (5,6), (5,7), (6,7)\}$

- R_1 علاقة ليست تناظرية
  $\exists 0, 6 \in A , (0,6)\in R \text{ but}(6,0) \notin R$
- R_1 علاقة ضد متناظرة
  $\forall x,y\in A\ (x,y) \in R_1 \wedge (y,x)\in R_1\rightarrow x=y$
- R_1علاقة انعكاسية
  $\forall \ \in A\rightarrow (x, x)\in R_1$
- R_1 علاقة متعدية
  $\forall x, y, z\in A , (x, y)\in R_1 \wedge (y, z) \in R_1\rightarrow (x, z)\in R_1$

$R_3 = \{(x, y): x-y > 1\}$

$R_3 = \{ (3,1), (2,0), (3,0), (4,0), (4,1), (4,2), (5,0), (5,1), (5,2), (5,3), (6,0), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (7,0), (7,1), (7,2), (7,3), (7,4), (7,5)\}$

- R_3 علاقة ليست متناظرة
  $\exists 2,0 \in A$
  $(2,0)\in R_3$ but $(0,2) \notin R_3$
- R_3 ليست علاقة ضد متناظرة
- R_3 ليست علاقة انعكاسية
  $\exists\ 6\in A$, but $(6,6) \notin R_3$
- R_3 علاقة متعدية
  $\forall\ x, y, z\in A\ , (x,y)\in R_3 \wedge (y, x)\in R_3 \rightarrow (x, z)\in R_3$

واجب (R_2, R_4)

<u>علاقة التكافؤ Equivalence Relation</u>: لتكن R علاقة على المجموعة A فأن R تسمى علاقة تكافؤ إذا كانت:

1- علاقة انعكاسية.
2- علاقة متناظرة.
3- علاقة متعدية.

مثال: لتكن R علاقة معرفة على الاعداد الحقيقية $(\mathbb{R})$ بحيث $R= \{(x, y)\in RxR: x=y\}$ هل العلاقة R علاقة تكافؤ؟

الحل:

- علاقة انعكاسية
  $\forall\ x\in \mathbb{R} \rightarrow x = x$
  i.e $\forall\ x \in \mathbb{R} \rightarrow (x , x) \in R$
- علاقة متناظرة

$\forall\ x\in \mathbb{R}, x= y \rightarrow y= x$

i.e $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in$

* علاقة متعدية

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad , x= y \wedge y= z \rightarrow x= z$

i.e $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x, y)\in R \wedge (y, z)\in R \rightarrow (x, z)\in R$

إذاً العلاقة R علاقة تكافؤ

واجب: لتكن R علاقة على $\mathbb{R}$ حيث $R=\{(x, y)\in \mathbb{R}x\mathbb{R} : x< y\}$ هل العلاقة R علاقة تكافؤ

<u>علاقات الترتيب Ordered Relation:</u> لتكن R علاقة على المجموعة غير الخالية A فأن R تسمى:

1- **علاقة ترتيب جزئي:** إذا كانت علاقة انعكاسية، ضد متناظرة، متعدية.

ملاحظة: يدل الرمز $\leq$ على علاقة الترتيب الجزئي على A أي ان إذا كان (x, y) ينتمي الى العلاقة فيكتب بالصورة $x\leq y$ ويكتب أيضا $x< y$ للدلالة على ان $(x\leq y \wedge x\neq y)$.

2- **علاقة ترتيب حدي**: إذا كانت علاقة غير انعكاسية، ضد متناظرة، متعدية.

3- **علاقة ترتيب كلي**: اذا كانت علاقة ترتيب جزئي و لكل عنصرين في A $(\forall x, y \in A)$ اما $x\leq y$ او $y\leq x$.(أي ان كل عنصرين في المجموعة يرتبطان ببعضهما بالعلاقة $\leq$)

مثال: لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الصحيحة وحيث $R= \{(x, y) \in ZxZ: x\leq y\}$ هل العلاقة R علاقة ترتيب جزئي؟

لاحظ ان لكل عددين صحيحين x,y فأنه:

1- $x\leq x \leftarrow (x, x)$ ينتمي الى R (انعكاسية)

2- إذا كان $x\leq y$ و $y\leq x \leftarrow x= y$ (ضد متناظرة)

3- إذا كان $x\leq y$ و $y\leq z$ فأن $x\leq z$ (متعدية)

اذن العلاقة R علاقة ترتيب جزئي

مثال: لتكن R علاقة معرفة على Z (مجموعة الاعداد الصحيحة). بحيث ان $R= \{(x,y: x\leq y\}$

فأن R علاقة ترتيب كلي وذلك لأنها:

1- علاقة ترتيب جزئي (حسب المثال السابق)
2- لكل عددين صحيحين x, y فأن $y\leq x$ او $x\leq y$

المجموعات المرتبة كلياً والمجموعات المرتبة كلياً:

تعريف: لتكن A مجموعة غير خالية ولتكن R علاقة على A فأن الثنائي (A,R) يسمى مجموعة مرتبة جزئياً إذا كانت العلاقة R علاقة ترتيب جزئي على A. كذلك يسمى الثنائي (A,R) مجموعة مرتبة كلياً إذا كانت R علاقة ترتيب كلي على A.

واجب: الثنائي $(\mathbb{R}, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً. (علماً ان $\mathbb{R}$ مجموعة الاعداد الحقيقية)