التفاضل والتكامل الصف الاول

- ماهو التفاضل والتكامل وماهي علاقته بالاشتقاق .
- لماذا ندرس التفاضل وماهي
- ماهي المجالات التي تحل فيه التفاضل

التفاضل هو احد فروع علم الرياضيات وهو يعني بمقدار تناسب التغير عند نقطه معينه في علاقة ما ، ورياضياً مفاضلة الداله او التابع عند نقطه معينه هو مقياس لمقدار تغير متغير بالنسبة لمتغير اخر .

يعتمد التفاضل على ايجاد معادله لايجاد الميل عند نقطه معينه عن طريق تقليل الفرق بين التغير في قيم X الى ٥ تقريباً وهذا هو الاشتقاق .

التفاضل هو علم يجمع بين الحساب والجبر والهندسة .

سوف ندرس

- الاعداد الحقيقية
- المجموعات والدوال
- النهايات والاتصال
- المشتقات
- تطبيقات على المشتقات
- التكامل
- الدوال الاسية واللوغاريتمية اللوغارتيمية
- معكوس الدوال المثلثية
- طرق التكامل

الاعداد الحقيقية . Real number

الاعداد الطبيعية :- Natural Numbers

1, 2, 3, 4, ...

وهي التي تستخدم في العد ويمكن الحصول على اي عدد منها بجمع العدد 1، الى نفسه عددا من المرات وهي اول نظام عددي عرفه الانسان ويرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ اي ان

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

وهي مجموعة غير منتهية مغلقة تحت عمليتي الجمع والضرب .

الاعداد الصحيحة .

$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

وهي الاعداد الطبيعية مضافا اليها الصفر وسالب الاعداد الطبيعية وهذه المجموعة مغلقة تحت عمليات الجمع والضرب والطرح .

ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

وهي كذلك مجموعة غير منتهية .

الاعداد القياسية :-

وهي الاعداد التي على شكل $\frac{a}{b}$ ، حيث a, b يمثلان عددين صحيحين و $b \neq 0$

ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$ اي ان

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

نلاحظ ان اي عدد صحيح a يكون العدد القياسي $\frac{a}{1}$

العدد القياسي يجب ان يكون عددا عشريا منتهيا . مثل 0.243

الاعداد غير القياسية :.

هو العدد الذي لا يمكن كتابته على الشكل $\frac{a}{b}$ حيث a و b يمثلان عددين صحيحين
اي ان الاعداد غير القياسية هي الاعداد الحقيقية التي لا تكون اعداد قياسية .
يرمز لها بالرمز Q^c اي ان

$$Q^c = \{ r : r \neq \frac{a}{b} , a,b \in Z \}$$

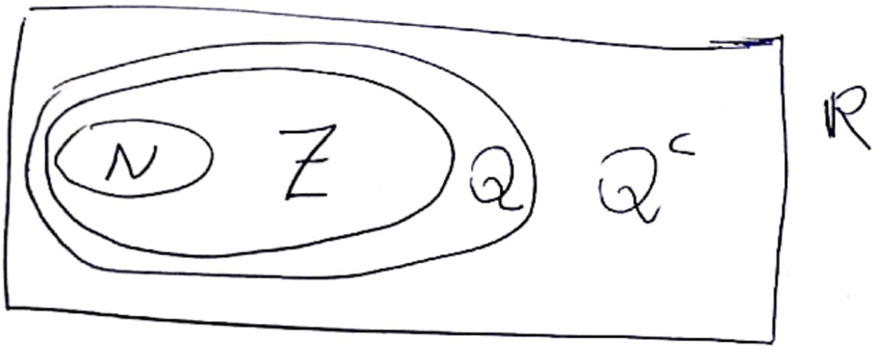
مثال :- π , $\sqrt{2}$, الاعداد العشرية غير المنتهية

$$\frac{22}{7} = \pi$$

الاعداد الحقيقية :- هي كل الاعداد القياسية وغير القياسية ويرمز لها

$$R = Q \cup Q^c$$

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$



بعض خواص الاعداد الحقيقية :.

اذا كانت a,b,c اعداداً حقيقية فان

١- $a+b$ عدد حقيقي

٢- $a.b$ عدد حقيقي

٣- $\frac{a}{b}$ (حيث $b \neq 0$) عدد حقيقي

٤- 0 عدد حقيقي وهو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع .

5- 1 عدد حقيقي وهو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب.

٦- لكل عدد حقيقي a معكوس جمعي $(-a)$

٧- لكل عدد حقيقي a لا يساوي الصفر معكوس ضربي $\left(\frac{1}{a}\right)$.

المتباينات (Inequalities)

اذا كان a,b عددين حقيقيين وكانت النقطة المقابلة للعدد a تقع على يمين النقطة المقابلة للعدد b على خط الاعداد فاننا نقول ان العدد a اكبر من العدد b ونكتب ذلك على شكل $a>b$ ويكافئ ذلك قولنا ان العدد b اصغر من العدد a.

الحل: $a>b$ و $a\geq b$ (العدد a اكبر من او يساوي العدد b)

$a<b$ و $a\leq b$ تسمى متباينات وتسمى الاشارات $>$ و $\leq$ و $<$ و $\geq$

اشارات المتباينات.

خواص المتباينات:-

اذا كانت a,b,c اعداد حقيقية فان

١- $b<a$ او $a<b$ او $a=b$

٢- $b<a$ و $c<b$ يؤدي الى ان $c<a$

٣- $b<a$ يؤدي الى ان $b+c<a+c$ لاي عدد حقيقي c

٤- $b<a$ و $c>0$ يؤدي الى ان $bc<ac$

٥- $b<a$ و $c<0$ يؤدي الى ان $bc>ac$

مثال: اوجد حلول المتباينة $2x+1>2$

$$2x+1-1>2-1$$

$$2x>1$$

$$x>\frac{1}{2}$$

اي ان اي عدد اكبر من $\frac{1}{2}$ يعتبر حلاً لهذه المتباينة.

مثال: أوجد حلول هذه المتباينة $1-3x > 2$

$$1-3x-1 > 2-1$$

$$-3x > 1$$

بالضرب $\left(-\frac{1}{3}\right)$

$$x < -\frac{1}{3}$$

أي أن أي عدد أصغر من $-\frac{1}{3}$ يعتبر حلاً لهذه المتباينة.

الفترات :- (Intervals)

إذا كان $a, b \in R$ وكان $a < b$ فإن

١- الفترة المفتوحة (a,b) هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x ، التي تقع بين a , b بحيث لا يكون العددان a , b في هذه المجموعة.

$$(a,b) = \{x : a < x < b\}$$

وتمثل على خط الأعداد كالآتي

٢- الفترة المغلقة $[a,b]$: هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x ، التي تقع بين a , b ، بما في ذلك a , b

$$[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

وتمثل على خط الأعداد كالآتي

٣- الفترة نصف المفتوحة $[a,b)$: هي مجموعة كل الاعداد الحقيقية x التي تقع بين a و b بما في ذلك العدد a .

$$[a,b) = \{x : a \le a < b\}$$

وتمثل على خط الاعداد كالآتي :-

٤- الفترة نصف المفتوحة: $(a,b]$

هي مجموعة كل الاعداد الحقيقية x التي تقع بين a و b بما في ذلك العدد b .

$$(a,b] = \{x : a < x \le b\}$$

وتمثل على خط الاعداد كالآتي :

هذه الفترات تسمى الفترات المحدودة اما الفترات غير المحدودة فيمكن تصنيفها كالآتي

١- $(a,+\infty)$ وهي كل الاعداد الحقيقية x الاكبر من العدد a .

$$(a,+\infty) = \{x : x > a\}$$

وتمثل على خط الاعداد بالشكل

٢- $(-\infty,b)$ وهي مجموعة كل الاعداد الحقيقية x ، الاصغر من العدد b .

$$(-\infty,b) = \{x : x < b\}$$

وتمثل على خط الاعداد بالشكل

٣- $[a, +\infty)$ وهي مجموعة كل الاعداد الحقيقية x الاكبر من a او تساويه .

$$[a, \infty) = \{x : x \geq a\}$$

وتمثل على خط الاعداد بشكل

٤- $(-\infty, b]$ وهي مجموعة كل الاعداد الحقيقية x الاصغر من b او تساويه .

$$(-\infty, b] = \{x : x \leq b\}$$

وتمثل على خط الاعداد بشكل

ملاحظة : نستطيع كتابة الاعداد الحقيقية على الشكل $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

مثال : اوجد مجموعة الحل وتمثلها بيانياً على خط الاعداد للمتباينة

$$-11 \leq 2x - 3 < 7 .$$

الحل : $+3$ الى طرفي المتباينة

$$-8 \leq 2x < 10$$

$/2$

$$-4 \leq x < 5$$

وبذلك تكون مجموعة الحل الفترة $[-4, 5)$.

مثال : اوجد حل المتباينة $\frac{1}{x} < 4$

الحل : الحالة الاولى : اذا كان $x > 0$

بضرب المتباينة في x نجد ان $1 < 4x$ او $x > \frac{1}{4}$

الحالة الثانية اذا كان $x < 0$

بضرب المتباينة في x نجد ان $1 > 4x$ او $x < \frac{1}{4}$

ولكن $x < 0$ وبذلك يكون الحل في الحالة الثانية هو $x < 0$

$$\therefore (-\infty, 0) \cup (\tfrac{1}{4}, \infty)$$

مثال :- اوجد مجموعة الحل اذا كان $x^2+x-2>0$

الحل :- يمكن كتابة x^2+x-2 على شكل $(x+2)(x-1)$

نلاحظ ان $(x+2)(x-1)>0$ يعني ان المقدارين $(x+2)$, $(x-1)$ اما ان يكونا موجبين معاً واما سالبين معاً .

$x-1>0$
$x>1$
$x+2>0$
$x>-2$
$x-1<0$
$x<1$
$x+2<0$
$x<-2$

اشارة $(x-1)$ - - - - - - - - - - + + + + + + +

اشارة $(x+2)$ - - - - - - + + + + + + + + + + + + + + +

من الرسم يتضح ان لهما نفس الاشارة في الفترتين $(1,\infty)$, $(-\infty,-2)$

اذن مجموعة الحل $x\in(-\infty,2)\cup(1,\infty)$

مثال :- اوجد مجموعة الحل للمتباينة $\frac{3x+2}{2x-7}\le 0$

الحالة الاولى :- اذا كان $2x-7>0$ يعني ذلك ان $x>\frac{7}{2}$

نضرب المتباينة في $2x-7$ فان

$3x+2\le 0$ وهذا يؤدي الى ان $x\le -\frac{2}{3}$

مما يؤدي الى تناقض. لماذا ؟

الحالة الثانية :- اذا كان $2x-7<0$ ومعنى ذلك ان $x<\frac{7}{2}$

نضرب المتباينة في $2x-7$ فان

$3x+2\ge 0$ وهذا يؤدي الى ان $x\ge -\frac{2}{3}$

اذن مجموعة الحل هي $x\in[-\frac{2}{3},\frac{7}{2})$

م/ القيمة المطلقة:

يرمز للقيمة المطلقة لاي عدد حقيقي x بالرمز $|x|$ ويعرف كالاتي :-

$$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

من التعريف نلاحظ ان القيمة المطلقة لاي عدد حقيقي لابد ان يكون اكبر من الصفر او مساوية اي ان القيمة المطلقة لاي عدد حقيقي تكون موجبة او صفراً .

هندسياً القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة بين النقطة A التي احداثيها x ونقطة الاصل O

اذا كانت A و B نقطتين على خط الاعداد باحداثيات x و y على الترتيب فان

$|x-y|$ هي المسافة بين A و B .

تعريف :- اذا كان a عدداً حقيقياً موجباً و x اي عدد حقيقي فان

$$|x| \leq a \longleftrightarrow -a \leq x \leq a$$

خواص القيمة المطلقة :-

اذا كانت $a, x, y \in \mathbb{R}$ فان

١- $|x| = 0 \longleftrightarrow x = 0$

٢- $|x||y| = |xy|$

٣- $|x| = |-x|$ وكذلك $|x| = \sqrt{x^2}$

٤- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ بشرط ان $y \neq 0$

٥- $|x+y| \leq |x| + |y|$

٦- $|x|^2 = x^2$

٧- $|x| = y \longleftrightarrow x = y$ او $x = -y$

سوف نبرهن الخاصية (5)

من الواضح $|x| \geq x$ وكذلك $y \leq |y|$

ومن ذلك $x+y \leq |x|+|y| \quad \dots(1)$

وكذلك $-x \leq |x|$ و $-y \leq |y|$

وبهذا يكون لدينا $-(x+y) \leq |x|+|y|$

من خاصية الضرب في عدد سالب نحصل على

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \quad \dots(2)$$

الآن من 1 و 2 نحصل على

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

ومن التعريف يكون لدينا

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

مثال: حل المتباينة $|3x+4| \leq 2$

الحل: $|3x+4| \leq 2$ اذا وفقط اذا كان $-2 \leq 3x+4 \leq 2$ وبطرح 4

من اطراف المتباينة نجد $-6 \leq 3x \leq -2$

بالقسمة على 3 يكون لدينا $-2 \leq x \leq -\frac{2}{3}$

اي ان مجموعة الحل لهذه المتباينة هي $x \in [-2, -\frac{2}{3}]$

مثال: اوجد الحل للمتباينة $|x+2| \geq 8$

$|x+2| \geq 8$ اذا وفقط اذا كان $x+2 \geq 8$ أو $x+2 \leq -8$

في الحالة $x \geq 6 \Leftarrow x+2 \geq 8$

$x \leq -10 \Leftarrow x+2 \leq -8$

مجموعة الحل هي $(-\infty,-10] \cup [6,\infty)$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

محاضرة 2

الصف الاول

خواص المطلق

(1) $|-x| = |x|$

let $x = 0 \Rightarrow |-x| = |-0| = |0| = |x|$

let $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow |-x| = -(-x) = x = |x|$

let $x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow |-x| = -x = |x|$

(2) $|x-y| = |y-x|$

from (1) $|x-y| = |-(x-y)|$

$\therefore |x-y| = |-(x-y)| = |y-x|$

(3) $|x| = c \Rightarrow x = \pm c$

let $|x| = c$

if $x \geq 0 \Rightarrow x = |x| = c \Rightarrow x = c$

if $x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow -x = |x| = c \Rightarrow -x = c \Rightarrow x = -c$

$\therefore x = \pm c$

(4) $|x|^2 = x^2$

if $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow |x|^2 = x^2$

if $x < 0 \Rightarrow -x = |x| \Rightarrow |x|^2 = (-x)^2 = x^2$

5. $|xy| = |x||y|$

$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2 y^2 = |x|^2 |y|^2$$

ن القيمة المطلقة تأخذ القيمة الموجبة فقط

$$\therefore |xy| = |x||y|$$

6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \ y \neq 0$

$$|y| \cdot \left|\frac{x}{y}\right| = \left|y \cdot \frac{x}{y}\right| = |x|$$

نقسم على $|y|$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

7. $|x| = |y| \longrightarrow x = \pm y$

if $y = 0 \Rightarrow |x| = |y| = |0| = 0$

$x = 0$

if $y \neq 0$

$$|x| = |y| \xrightarrow[|y|]{\text{نقسم}} \frac{|x|}{|y|} = \frac{|y|}{|y|} \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \pm 1$$

$$\boxed{x = \pm y}$$

(8) $|x+y| \leq |x|+|y|$

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

(9) $|x-y| \leq |x|+|y|$

$$|x+(-y)| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|$$

$$\therefore |x-y| \leq |x|+|y|$$

(10) $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y|$$

$$|x|-|y| \leq |x-y|$$

$$|y| = |y-x+x| \leq |y-x|+|x| = |x-y|+|x|$$

$$|y|-|x| \leq |x-y| \Rightarrow -(|x|-|y|) \leq |x-y|$$

$$|x|-|y| \geq -|x-y|$$

$$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$$

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$$

Equations of straight lines — معادلات الخط المستقيم — محاضرة ٣ — الاولى

من الموضوعات المهمة في التفاضل والتكامل موضوع المستقيمات اذ نحتاج الى ذلك في معظم الحالات التي تقابلها خصوصاً في حالة المماسات .

ان ميل (Slope) المستقيم هو قياس معدل التغير النسبي للاحداثيات x و y للنقطة (x,y) كلما تحركنا على المستقيم .

تعريف :- لنفرض ان L مستقيم غير عمودي وان $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ نقطتان عليه ميل المستقيم L والذي سنرمز له بالرمز m يمكن الحصول عليه كما يلي :-

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

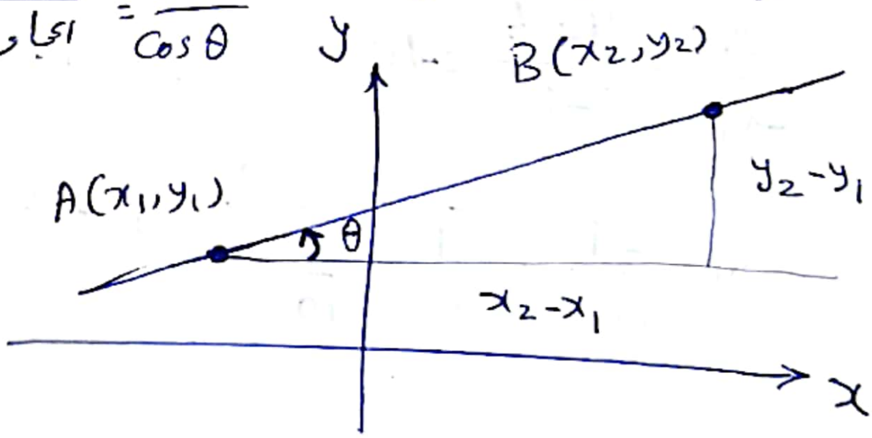
ملاحظات :-

١- اذا كان $m > 0$ فان المستقيم يتجه الى الاعلى كلما تحركنا من اليسار الى اليمين .

٢- اذا كان $m < 0$ فان المستقيم يتجه الى الاسفل كلما تحركنا من اليسار الى اليمين .

٣- ميل المستقيم m هو ظل الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع محور السينات او المستقيم الموازي لمحور السينات اي ان

$$m = \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



شرط توازي المستقيمين :-

اذا كان ميل المستقيم L_1 هو m_1 وميل المستقيم L_2 هو m_2 فان

L_1 يوازي L_2 اذا وفقط اذا كان $m_1 = m_2$

شرط تعامد المستقيمين :-

اذا كان ميل المستقيم L_1 هو m_1 وميل المستقيم L_2 هو m_2 فان

L_1 عمودياً على L_2 اذا وفقط اذا كان $m_1 m_2 = -1$

مثال : يقع النقطتان $(1,-1)$ و $(2,1)$ على المستقيم L_1 ووقعت النقطتان $(-2,0)$ و $(0,4)$ على المستقيم L_2 . حدد ما اذا كان المستقيمان متوازيان او متعامدان .

الحل

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1+1}{2-1} = 2 \quad , \quad m_2 = \frac{4-0}{0+2} = 2$$

∴ المستقيمان L_1 و L_2 متوازيان .

مثال : يمر المستقيم L_1 بالنقطتين $(2,-6)$ و $(1,4)$ اوجد ميل L_2 الذي يكون عمودياً على المستقيم L_1 .

الحل

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4+6}{1-2} = -10 \qquad m_1 = -10$$

بما ان $L_1 \perp L_2$ فان

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{-10} = \frac{1}{10}$$

إيجاد معادلة المستقيم

١- المعادلة المستقيم بدلالة ميله ونقطة عليه .

لنفرض ان المستقيم ما (غير عمودي) يمر بالنقطة (x_1, y_1) وان ميله m .

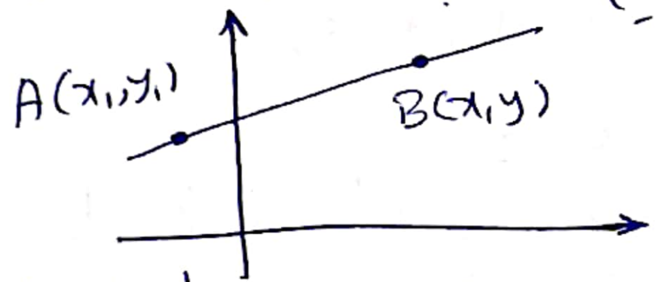
نأخذ اي نقطة عامة $B(x, y)$ على المستقيم ما .

من صيغة الميل نجد ان $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

وهذا يكافئ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

وهذه هي معادلة المستقيم ما بمعلومية ميله ونقطة عليه



مثال :- عين معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $(1, 2)$

الحل معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة عليه $y - y_1 = m(x - x_1)$

نعوض عن $m = \frac{1}{2}$ ، $y_1 = 2$ ، $x_1 = 1$ لنجد ان

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

اي ان المعادلة المطلوبة هي

$$2y - x = 3$$

٢- معادلة المستقيم بدلالة نقطتين عليه

اذا كانت النقطتان $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ تقعان على المستقيم ما فان ميله m هو

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نأخذ احدى النقطتين ولتكن $A(x_1, y_1)$ والميل الذي حصلنا عليه ونستخدم الصيغة السابقة $y - y_1 = m(x - x_1)$

اي ان

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

وهذه هي معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين A, B

مثال :- عين معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(3,2)$, $(1,4)$

الحل

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

let $x_1=3$, $y_1=2$

$x_2=1$, $y_2=4$

$$y-2=\frac{\overset{2}{\cancel{4-2}}}{\underset{-2}{\cancel{1-3}}}(x-3)$$

$$y-2=-1(x-3)$$

$$y+x=5$$

٣- معادلة المستقيم بدلالة ميله والجزء الذي يقطعه من محور الصادات

لنفرض ان المستقيم ما يقطع جزءاً من محور الصادات مقداره b وان ميله m

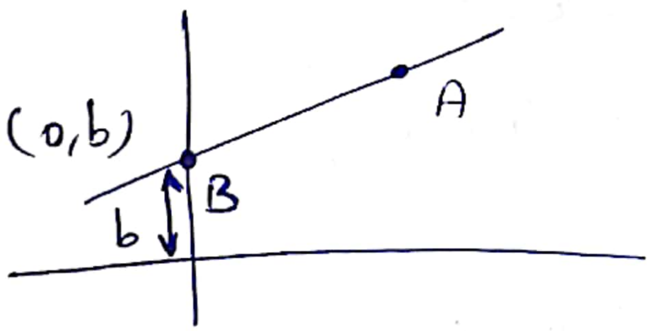
اذا استعملنا صيغة الميل ونقطة كذا ن

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$\Rightarrow y-b=m(x-0)$$

$$\Rightarrow y=mx+b$$

وهو معادلة المستقيم الذي يقطع الجزء b من محور الصادات وميله m



let $x_1 = 0$

$y_1 = b$

x_2, y_2

$$m = \frac{y_2 - b}{x_2 - 0}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - b = \frac{y_2 - b}{x_2} x \Rightarrow y = \frac{y_2 - b}{x_2} x + b$$

مثال: - اوجد معادلة المستقيم الذي ميله $-\frac{1}{2}$ ويقطع محور الصادات عند $\frac{3}{4}$

الحل

$$y = mx + b$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

وهذا يكافئ

$$2x + 4y = 3$$

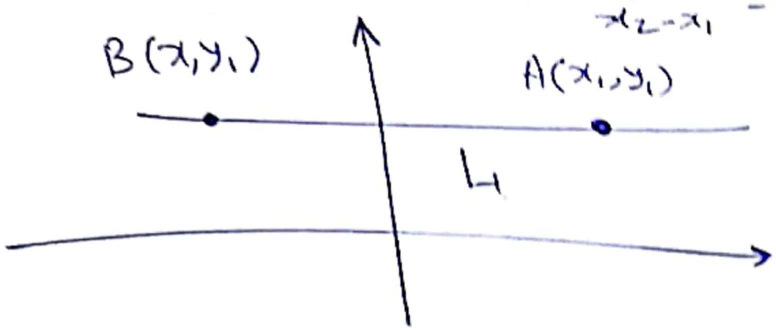
4) اذا كان المستقيم L افقيا (يوازي محور السينات) ويمر بالنقطة $A(x_1, y_1)$

فان ميله $m = 0$ لان الاحداثي الصادي لاي نقطة P هو y_1

اذا كانت (x, y) نقطة عامة على المستقيم L فان

$$y - y_1 = 0$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$$



$$\therefore y = y_1$$

وهي معادلة المستقيم الافقي المار بالنقطة $A(x_1, y_1)$

5) اذا كان المستقيم ما رأسياً (اي يوازي محور الصادات) ويمر بالنقطة $A(x_1, y_1)$.

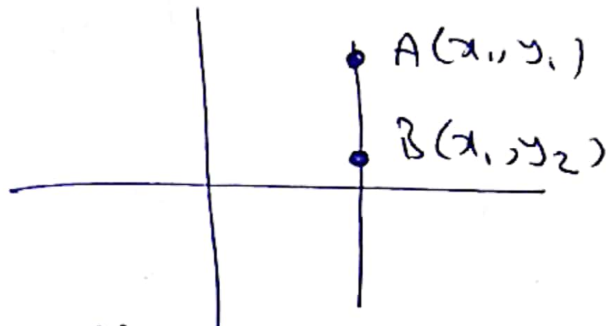
فان الاحداثي السيني لاي نقطة عليه هو x_1

اذا كانت (x, y) نقطة عامة على المستقيم ما فان

$$x - x_1 = 0$$

وبذلك تكون معادلة المستقيم الرأسي المار بالنقطة $A(x_1, y_1)$

$$x = x_1$$



مثال: - اوجد معادلة المستقيم الافقي الذي يمر بالنقطة $(2, 1)$

الحل

$$y = y_1 \Rightarrow y = 1$$

مثال: - اوجد معادلة المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة $(3, 0)$

الحل

$$x = x_1 \Rightarrow x = 3$$

الصورة العامة لمعادلة المستقيم:-

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي $Ax + By + C = 0$ حيث A, B, C

اعداد حقيقية ويشترط الا يساوي A ، B الصفر في آن واحد.

1- اذا كان $C = 0$ فان $Ax + By = 0$ ومنها

$$y = -\frac{A}{B}x$$

وهي معادلة مستقيم يمر بنقطة الاصل وميله $-\frac{A}{B}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

٢- اذا كان $A \neq 0$, $B = 0$ فان

$$Ax + c = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-c}{A}$$

وهي معادلة مستقيم رأسي يوازي محور الصادات ويقطع جزءاً من محور السينات مقداره

$$-\frac{c}{A}$$

٣- اذا كان $A = 0$ و $B \neq 0$ فان $By + c = 0$ ومنها

$$y = -\frac{c}{B}$$

وهي معادلة مستقيم يوازي محور السينات ويقطع جزءاً من محور الصادات مقداره

$$-\frac{c}{B}$$

الأول

Limits and Continuity النهايات والاتصال

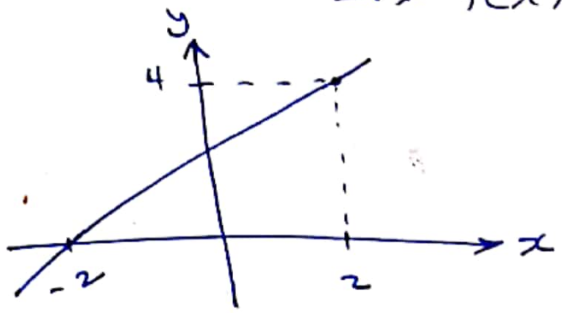
محاضرة رقم ((5))

النهايات (limits)

مثال: . اوجد نهاية الداله $f(x)=x+2$ عندما x تقترب من 2

أي) عند رسم الداله $f(x)=x+2$ نلاحظ ان $x+2$ تقترب من 4

كلما اقترب x من 2.



والجدول التالي يوضح ذلك:

x	1.9	1.92	1.94	1.96	1.98	2	2.02	2.04
$f(x)$	3.9	3.92	3.94	3.96	3.98	4	4.02	4.04

x	2.06	2.08	2.1
$f(x)$	4.06	4.08	4.1

من ذلك نستنتج ان نهاية الداله f تساوي 4 عندما x تقترب من 2

ويكتب ذلك رياضياً

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

مثال 2 اوجد نهاية الداله $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ عندما تقترب x من 1

أي) نلاحظ ان $\sqrt{x}$ تقترب من 1 كلما اقترب x من 1 وان $1+\sqrt{x}$ تقترب من 2 كلما اقترب x من 1 ولذلك نستنتج ان

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

مثال ٣

$$\lim_{\boxed{x \to 2}} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$\frac{x^2-4}{x-2}$	3.5	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1

2.5

4.5

مثال ٣ طريقة اسهل

اوجد $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

الحل/ نلاحظ ان x^2-4 و $x-2$ يؤولان الى الصفر كلما اقترب x من 2 ومن ذلك نظهر ان

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$$

ولكن نعرف ان $\frac{0}{0}$ كمية غير معرفه . لهذا السبب لابد من طريقة اخرى للحل. يتبادر الى الذهن

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}} = x+2$$

عندما $x \neq 2$ وبذلك نأخذ.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} x+2 = 4$$

لاحظ ان 2 لا يوجد في نطاق الداله $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

ولكن $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

مثال :- اوجد

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

الحل / عندما نعوض $x = 1$ نجد ان

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

ولكن $\frac{0}{0}$ كمية غير معرفة

نحاول طريقة اخرى للحل

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

اذن

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

من الامثلة السابقة نستطيع ان نعطي تعريفاً للنهاية

تعريف : نقول ان العدد الحقيقي L هو نهاية للدالة f عندما يؤول x الى a اذا كانت $f(x)$ تقترب من L كلما اقترب x من a من الجانب الايسر والايمن ونكتب

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ملاحظة :- الداله f ليس من الضروري ان تكون معرفه عند a (a ليس من الضروري ان يكون في نطاق الداله f) ولكن f لابد ان تكون معرفه حول a اي في فترة مفتوحه تحتوي على a) انظر المثال ٢

مثال: اوجد $\lim_{x \to 4} f(x)$ اذا كانت $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

الحل

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	0.95	0.995	0.9995	1	1.0005	1.005	1.05

نستنتج ان $\lim_{x \to 4} \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 1$

في هذا المثال نلاحظ ما يلي

اذا كانت $3.9 < x < 4.1$ فان $0.95 < f(x) < 1.05$

واذا كانت $3.99 < x < 4.01$ فان $0.995 < f(x) < 1.005$

واذا كانت $3.999 < x < 4.001$ فان $0.9995 < f(x) < 1.0005$

بعبارة اخرى اذا كانت ε , δ عددين حقيقين موجبين وصغيرين جداً فاننا نستنتج مما سبق انه اذا كانت

$4 - \delta < x < 4 + \delta$ فان $1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon$

في الحالة الاولى $\delta = 0.1$, $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$

وفي الحالة الثانية $\delta = 0.01$, $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$

وفي الحالة الثالثة $\delta = 0.001$, $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$

ويمكن كتابته على الشكل :

اذا كانت $-\delta < x - 4 < \delta$ فان $-\varepsilon < f(x) - 1 < \varepsilon$

وهذا يعني انه اذا كانت

$|x - 4| < \delta$ ، فان $|f(x) - 1| < \varepsilon$

• من المثال السابق نستطيع اعطاء تعريف اخر للنهاية كما يلي

تعريف: التعبير $\lim_{x \to a} f(x) = L$ يعني انه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$

حيث انه اذا كان $0 < |x-a| < \delta$ فان $|f(x) - L| < \varepsilon$

مثال: وضح $\lim_{x \to 4} \frac{7x-2}{2} = 13$

الحل/ لكل $\varepsilon > 0$ نحاول ايجاد $\delta > 0$ بحيث انه اذا كان $0 < |x-a| < \delta$

فان $|f(x) - L| < \varepsilon$

$$\left| \frac{7x-2}{2} - 13 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{7x-2-26}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{7(x-4)}{2} \right| < \varepsilon$$

او $|x-4| < \frac{2}{7}\varepsilon$

فاذا كان $\delta = \frac{2}{7}\varepsilon$ فان

$$\left| \frac{7x-2}{2} - 13 \right| < \varepsilon$$

$|x-4| < \delta$ تؤدي الى ان

في كل الامثلة السابقة استخدمنا كلمة الاقتراب من x ولكن لم نوضح الاقتراب من اليمين او اليسار، المثال التالي يوضح هذه الفكرة.

مثال: اوجد $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

الحل/ اذا اقترب x الى الصفر من جهة اليمين نرى

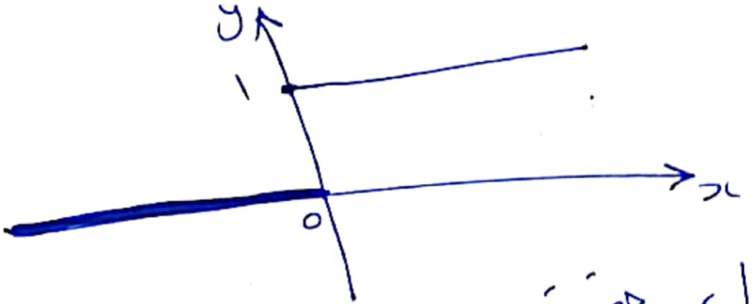
$$\lim_{x\to 0} f(x)=1$$

واذا اقترب x الى الصفر من جهة اليسار نرى ان

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

وبالتالي فان $\lim_{x\to 0} f(x)$ ليست وحيدة.

في هذه الحالة نقول بأن نهاية الدالة غير موجودة عندما يقترب x الى الصفر



تعريف: لنفرض ان L عدد حقيقي

١) نقول ان L نهاية يمنى للدالة f عندما يؤول x الى a من الجانب الايمن

اذا كانت $f(x)$ تقترب الى L كلما اقترب x الى a من الجانب الايمن

نكتب

$$\lim_{x\to a^{+}} f(x)=L$$

هذا يعني ان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث ان $a<x<a+\delta$

يؤدي الى $|f(x)-L|<\varepsilon$

2) نقول ان L ما نهاية يسرى للدالة f عندما يؤول الى a من الجانب الايسر
اذا كانت $f(x)$ تقترب الى L كلما اقترب x الى a من الجانب الايسر.
نكتب
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$
هذا يعني ان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $a - \delta < x < a$
يؤدي الى $|f(x) - L| < \varepsilon$.
الرمز $x \to a^+$ يعني ان قيمة x تكون اكبر من a والرمز $x \to a^-$
يعني ان قيمة x تكون اصغر من a.
لكي تكون نهاية الدالة موجودة فلابد ان تكون النهاية اليمنى والنهاية اليسرى
متساويتين
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$
مثال:- اذا كانت $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ اوجد $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \to 1^-} f(x)$
و $\lim_{x \to 1} f(x)$

الحل/ من تعريف القيمة المطلقة نجد ان

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & x-1 < 0 \end{cases}$$

او

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -(x-1) & x < 1 \end{cases}$$

$$\frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

وبذلك فإن

$$\lim_{x \to 1^{+}} \frac{|x-1|}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^{-}} \frac{|x-1|}{x-1} = -1$$

ومما سبق نستنتج ان النهاية

$\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ غير موجودة .

طرق ايجاد النهايات . محاضرة رقم (6) الاول

١- اذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود على الشكل

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

حيث $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n$ اعداد حقيقية و n عدد صحيح موجب فان

$$\lim_{x\to b} f(x)=a_0+a_1b+a_2b^2+\dots+a_nb^n$$

مثال :- $f(x)=x^4-2x^3+5$ اوجد $\lim_{x\to 1} f(x)$

الحل

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1^4-2\cdot1^3+5=1-2+5=4$$

٢- اذا كانت $f(x)$ دالة ثابتة اي ان $f(x)$ تساوي عدداً ثابتاً مهما تغير x فان نهايتها هي ذلك العدد الثابت

مثال :- $f(x)=5$ فان $\lim_{x\to a} f(x)=5$

٣- اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة وكان c عدداً حقيقياً فان

$$\lim_{x\to a} c\,f(x)=c\lim_{x\to a} f(x)$$

مثال :- اوجد $\lim_{x\to 2} 6(x^2-x+3)$

الحل

$$\lim_{x\to 2} 6(x^2-x+3)=6\lim_{x\to 2} x^2-x+3=6(2^2-2+3)$$
$$=6(5)=30$$

٤ - لنفرض ان $\lim_{x \to a} f(x)$ و $\lim_{x \to a} g(x)$ موجودتان فان

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

اي ان نهاية جمع او طرح دالتين تساوي جمع أو طرح نهايتيهما.

مثال: اذا كانت $f(x) = x^3 - 5$ و $g(x) = x + 2$ اوجد

$$\lim_{x \to 2}[f(x) + g(x)]$$

اولاً

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(x^3 - 5) = 2^3 - 5 = 3$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 2 + 2 = 4$$

اذن

$$\lim_{x \to 2}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x) = 3 + 4 = 7$$

٥ - اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ و $\lim_{x \to a} g(x)$ موجودتان فان

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

اي ان نهاية حاصل ضرب دالتين تساوي حاصل ضرب نهايتيهما.

مثال: - اوجد $\lim_{x \to 1}(x+1)(x-4)$

اولاً $\lim_{x \to 1} x + 1 = 2$ و $\lim_{x \to 1} x - 4 = -3$

$$\therefore \lim_{x \to 1}(x+1)(x-4) = \lim_{x \to 1}(x+1) \cdot \lim_{x \to 1}(x-4) = 2(-3) = -6$$

6) اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ و $\lim_{x \to a} g(x)$ موجودتين ، $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

فان

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

مثال : . اوجد

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 3x + 1}$$

اولا

$$\lim_{x \to 0} x^3 - x^2 + 3 = 3 \ , \ \lim_{x \to 0} x^2 - 3x + 1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 3x + 1} = \frac{3}{1} = 3$$

7) اذا تم التعويض المباشر وحصلنا على $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{0}{0}$ فلابد من اجراء عمليات جبرية .

مثال :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

اولا بالتعويض المباشر نجد ان

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

اذن لابد من عملية جبرية

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

مثال :- اوجد $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

الحل)

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0}$$

$$\therefore \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

نظرية :- اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ فان هناك فترة مفتوحة تحتوي على a حيث $f(x) > 0$ لكل x في تلك الفترة.

البرهان :- لنفرض $\lim_{x\to a} f(x) = L$ من الفرض ان $L > 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

وهذا يعني اذا كان $x \in (a-\delta, a+\delta)$

فان $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

لاحظ ان الفترة المفتوحة التي تحتوي على a هي $(a-\delta, a+\delta)$

ومن الفرض $L > 0$ نستنتج ان $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ تحتوي على اعداد الموجبة فقط باختيار اي $\varepsilon < L$.

وهذا يعني ان $f(x) > 0$ على الفترة $(a-\delta, a+\delta)$

نظرية :- اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) < 0$ فان هناك فترة مفتوحة تحتوي على a

حيث $f(x) < 0$ لكل x في تلك الفترة .

البرهان. H.W

نظرية :- اذا كان $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي

على a واذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$ فان

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$

محاضرة رقم 7

الاول

مثال :- اذا كانت $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$

ناقش اتصالية الدالة $p(x)$.

الحل / من الواضح ان الدالة $p(x)$ معرفة لأي عدد حقيقي x

$$\lim_{x\to b} p(x)=\lim_{x\to b}(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)$$

$$=a_0+a_1b+\cdots+a_nb^n=p(b)$$

لأي عدد حقيقي b .

من هذا المثال نستطيع ان نستنتج

ان اي دالة كثيرة الحدود تكون متصلة عند اي عدد حقيقي .

تعريف :- اذا كانت $p(x)$ كثيرة الحدود في x وكانت $q(x)$ كثيرة الحدود في x ،

فان الدالة $R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ تسمى دالة قياسية . (Rational function)

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)}$$

اذا كان $q(a)\neq 0$ فان

ولذلك نستنتج ان اي دالة قياسية تكون متصلة عند كل النقاط a والتي يكون عندها القيمة $q(a)$ لا يساوي صفراً .

مثال :- ناقش اتصالية الدالة

$$f(x)=\frac{x^5+x^3-4x^2-2}{x^2-5x+6}$$

من الواضح ان $f(x)$ دالة قياسية . اذن $f(x)$ دالة متصلة عند كل الاعداد الحقيقية

عدا الاعداد x التي تحقق المعادلة $x^2-5x+6=0$ اي

$(x-3)(x-2)=0$ وهذا يعني $x=2$ و $x=3$.

قواعد عامة :- اذا كانت f و g دالتين متصلتين عند النقطة a وكان c عدداً ثابتاً فان

١- cf و $f.g$ و $f+g$ دوال متصلة عند a .

٢- اذا كانت الدالة g متصلة عند النقطة a والدالة f متصلة عند النقطة $g(a)$
فأن الدالة $f \circ g$ متصلة عند النقطة a .

مثال :- اوجد الفترة او الفترات التي تكون عليها الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9}$
متصلة .

الحل/ حيث ان f دالة قياسية . فأن f تكون متصلة عند كل نقطة في نطاقها

$x^2 - 9 = 0$ اذا كان $x = \pm 3$.

اذن نطاق f هو كل الاعداد الحقيقية ما عدا 3 و -3 ونعبر عن ذلك بالشكل

$$(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$$

$f(x)$ متصلة على

مثال :- ناقش اتصال الدالة $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & x < 2 \\ 3x+4 & x \geq 2 \end{cases}$

الحل/ $3x-4$ دالة متصلة عند اي عدد حقيقي اصغر من 2

$3x+4$ دالة متصلة عند اي عدد حقيقي اكبر من 2

الأن نبحث اتصالية الدالة عندما $x = 2$

١- $f(2) = 10$

2- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x - 4 = 2$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 3x + 4 = 10$

وبما ان $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$ فأن $\lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة

وبالتالي لم يتحقق الشرط الثاني من شروط الاتصال عند 2

اذن الدالة متصلة عند اي عدد حقيقي عدا $x = 2$

مثال 1 :- H.W

$$f(x)=\begin{cases} a & ; x=-3 \\ \dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & ; -3<x<3 \\ b & x=3 \end{cases}$$

اوجد a,b بحيث تكون الدالة f متصلة على $[-3,3]$

مثال 2 :- ماقيمة a التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & , x\neq 1 \\ a & x=1 \end{cases}$ متصلة .

المشتقات Derivatives

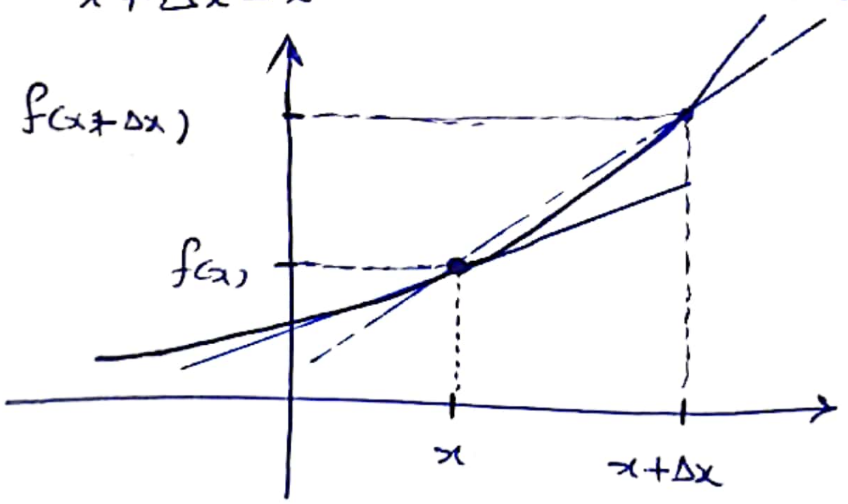
لنفرض ان $(x, f(x))$ نقطة على رسم الدالة $y=f(x)$

اذا كانت $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ نقطة اخرى على بيان الدالة

$y=f(x)$ حيث Δx هو الفرق في الاحداثي السيني للنقطتين فأن ميل

المستقيم L المار بالنقطتين هو

$$m_L=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$



لنترك النقطه $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ تتحرك على المنحني $y=f(x)$:

حيث تصغر Δx تدريجيا حتى تؤول الى الصفر:

عندما تؤول Δx الى الصفر يس المستقيم منا المنحني في نقطه واحده فقط

وبذلك يكون المستقيم مماسا للمنحني $y=f(x)$. ميل المماس للمنحني

$y=f(x)$ عند النقطه $(x, f(x))$ هو

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

بشرط ان تكون هذه النهاية موجودة.

ميل المنحني $y=f(x)$ عند النقطه $(x, f(x))$ هو ميل المماس لهذا المنحني عند النقطه $(x, f(x))$.

تعريف: لنفرض ان الدالة f معرفة على فترة مفتوحه تحتوي على x

المشتقة الاولى f' عند x وتكتب $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

بشرط وجود النهاية.

اذا وجدت المشتقة الاولى $f'(x)$ فاننا نقول ان الدالة f قابلة للاشتقاق

عند x او لها مشتقه اولى عند x.

نقول ان الداله f قابله للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) اذا كانت f

قابلة للاشتقاق عند كل نقطه من نقاط (a,b).

ونقول ان الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المغلقة $[a,b]$ اذا كانت

f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة وكانت النهايتان.

$$\lim_{\Delta x \to a^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x \to b^-} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x}$$

مثال :- اوجد المشتقة الاولى للدالة $f(x)=x^2+1$

الحل

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2+1=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+1$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+1-x^2-1$$
$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=2x+\Delta x$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\Delta x=2x$$

$\therefore$ $f'(x)=2x$.

نظرية :- اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند x_1 فان f مستمرة عند x_1 .

البرهان :- اذا كان x في نطاق f وكان $x\neq x_1$ فيمكن كتابة $f(x)$ كما يلي :-

$$f(x)=f(x_1)+f(x)-f(x_1)$$
$$=f(x_1)+\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}(x-x_1)$$

وبأخذ نهاية الطرفين واستخدام نظريات النهايات نجد ان

$$\lim_{x\to x_1}f(x)=\lim_{x\to x_1}f(x_1)+\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\lim_{x\to x_1}(x-x_1)$$

$$=f(x_1)+f'(x_1)\cdot 0=f(x_1)$$

الرموز التالية كلها تستخدم للدلالة على المشتقة الاولى f' بالنسبة للمتغير x

$$D_x y \ , \ \frac{dy}{dx} \ , \ y' \ , \ \frac{d}{dx} f(x) \ , \ D_x[f(x)] \ , \ f'(x)$$

بعض القوانين لايجاد المشتقة الاولى

١- اذا كانت f دالة ثابتة $f(x)=k$ حيث ان k مقدار ثابت فان

$f'(x)=0$.

البرهان :-

$$f(x+\Delta x)=k$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=k-k=0$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} 0=0$$

مثال : اذا كانت $f(x)=2^6$ فان

$f'(x)=0$.

٢- اذا كانت $f(x)=x^n$ حيث n عدد صحيح موجب فان

$$f'(x)=n x^{n-1}$$

البرهان :-

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{(x+\Delta x)-x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\dots+(x+\Delta x)x^{n-2}+x^{n-1}\right]$$

$$=x^{n-1}+x^{n-2}x+x^{n-3}x^2+\dots x\,x^{n-2}+x^{n-1}=n\,x^{n-1}$$

٣- اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق فان الدالة kf تكون قابلة للاشتقاق ايضا

محاضرة رقم 8 الاول

حيث ان k مقدار ثابت و $\frac{d}{dx}kf = k\frac{df}{dx}$.

البرهان :-

$$\frac{d}{dx}kf(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{kf(x+\Delta x) - kf(x)}{\Delta x} = k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وبناءً على نظرية النهايات $\frac{d}{dx}kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$

استخدمنا هنا خاصية النهاية وهي $\lim_{x \to a} kg(x) = k \lim_{x \to a} g(x)$

مثال :- اوجد $\frac{d}{dx}(9x^2)$

الحل / حيث ان 9 مقدار ثابت فان

$$\frac{d}{dx}(9x^2) = 9\frac{dx^2}{dx} = 9(2x) = 18x$$

٤- اذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق فان الداله f+g تكون قابله للاشتقاق ايضا و

$$\frac{d}{dx}(f+g)(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

البرهان :-

$$\frac{d}{dx}(f+g)(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x}$$

(من نظرية النهايات) $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) .$$

مثال :- اوجد $f'(x)$ اذا كانت $f(x) = 2x^6 + x^5 + x^3$

$$\frac{d}{dx}(2x^6 + x^5 + x^3) = \frac{d}{dx}(2x^6) + \frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= 2\frac{d}{dx}(x^6) + 5x^4 + 3x^2$$

$$= 12x^5 + 5x^4 + 3x^2$$

من استخدام القانون (٣) ووضع $k = -1$ نجد ان

$$\frac{d}{dx}(-f(x)) = -\frac{d}{dx}f(x)$$

اذن نستطيع ايجاد قانون لتفاضل الداله $f-g$ وذلك باستخدام القانون (٤)

$$\frac{d}{dx}(f-g)(x) = \frac{d}{dx}(f+(-g))(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}(-g)(x)$$

$$= \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

مثال :- اوجد $f'(x)$ اذا كانت $f(x) = x^3 - 2x - 1$

الحل

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x - 1) = \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(1)$$

$$= 3x^2 - 2 - 0 = 3x^2 - 2 ,$$

نستطيع توسيع القانون (4) الى اكثر من دالتين

اذا كانت $f_1, f_2, \ldots, f_n$ دوال قابله للاشتقاق

الدالة $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ قابلة للاشتقاق ,

$$\frac{d}{dx}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)(x) = \frac{d}{dx}f_1(x) + \frac{d}{dx}f_2(x) + \cdots + \frac{d}{dx}f_n(x) .$$

مثال :- اذا كانت $g(t)=17-4t^2+8t^3$ اوجد $g'(t)$

الحل

$$g'(t)=\frac{d}{dt}(17-4t^2+8t^3)=\frac{d}{dt}(17)-\frac{d}{dt}(4t^2)+\frac{d}{dt}(8t^3)$$

$$=0-4\frac{d}{dt}(t^2)+8\frac{d}{dt}(t^3)=0-8t+24t^2$$

$$=24t^2-8t\,.$$

مثال :- اطلقت مقذوفة الى الأعلى بسرعة 400 متر من الثانية وبعد t ثانية اصبحت تبعد عن الارض بالمسافة $S(t)=-16t^2+400t$ اوجد

أ) الزمن الذي تأخذه المقذوفة حتى ~~[illegible]~~ تصطدم بالارض.

ب) سرعة المقذوفة عندما تصطدم بالارض

ج) اعلى ارتفاع تصله المقذوفة.

الحل) عندما تصطدم المقذوفة بالارض تكون مسافتها عن الارض صفراً اي ان

$$S(t)=-16t^2+400t=0$$

ومن ذلك $t(400-16t)=0$

وهذا يعني ان $t=0$ او $t=25$ ثانية.

$t=0$ يعني ان الجسم لم يتحرك بعد ولهذا فان $t=25$ ثانية.

السرعة عند t هي

$$v(t)=S'(t)=-32t+400$$

اذن

$$v(25)=-32(25)+400=-400$$

يمكن الحصول على اعلى ارتفاع للمقذوفة عندما تكون $v(t)=0$ وهذا يعني

$$-32t+400=0$$

ومن ذلك $t=25/2$ ثانية.

اعلى ارتفاع تصله المقذوفة بعد $25/2$ ثانية اي ان

$$S(25/2)=-16(25/2)^2+400(25/2)=2500$$ متر

قانون الضرب والقسمة

1) قانون الضرب

١- اذا كانت f و g والتي قابلتين للاشتقاق فان الداله $f.g$ تكون قابلة للاشتقاق و

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x)=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

البرهان :-

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

باضافة وطرح الحد $f(x)g(x+\Delta x)$ في البسط نجد أن

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}+\frac{f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}\right)$$

$$\cancel{+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}\right)}$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right)$$

باستخدام نظريات النهاية نجد ان

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x)=\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\lim\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\lim\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)$$

$$=g(x)\frac{d}{dx}f(x)+f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

حيث ان g قابله للاشتقاق فان g متصلة وبهذا فان $\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)=g(x)$

مثال :- اوجد $h'(t)$ اذا كانت $h(t)=(t^2+2)(t^3-5)$

$$\frac{d}{dt}h(t)=\frac{d}{dt}((t^2+2)(t^3-5))$$

$$=(t^2+2)\frac{d}{dt}(t^3-5)+(t^3-5)\frac{d}{dt}(t^2+2)$$

$$=(t^2+2)(3t^2)+(t^3-5)(2t)$$

$$3t^4+6t^2+2t^4-10t=5t^4+6t^2-10t.$$

قانون القسمة :- اذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند x وكان $g(x)\neq 0$ فأن الداله $\frac{f}{g}$ تكون قابلة للاشتقاق عند x وتكون

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

البرهان :-

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}$$

بأضافة وطرح الحد $f(x)g(x)$ في البسط نجد ان

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x)\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)}$$

باستخدام نظرية النهايات نجد ان

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

استخدمنا ايضا

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$$

وذلك من اتصالية g

مثال : اوجد $f'(x)$ اذا كان $f(x) = \frac{x}{x-1}$

الحل

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{(x-1)\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)1 - x(1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

مبرهنة : اذا كان $y = x^{-n}$ عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً فان

$$\frac{dy}{dx} = (-n)x^{-n-1}$$

البرهان :

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

باستخدام قانون القسمة نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^n(0) - (1)(nx^{n-1})}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= (-n)x^{n-1-2n} = (-n)x^{-n-1}$$

$$(x+y)^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} x^{n-K} y^K \qquad \frac{n!}{(n-K)!\,K!}$$

$$= x^n y^0 + n\,x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} y^3$$

$$+ \cdots + n\,x\,y^{n-1} + x^0 y^n$$

$$\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)}!\;2!} = \frac{n^2-n}{2}$$

$K = n-1$

$$x^{n-(n-1)}\, y^{n-1} = x^1 y^{n-1} \quad \Big| \quad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{\boxed{n-(n-1)}!\,(n-1)!}$$

$$= n$$

$K = n$

$$x^{n-(n)}\, y^n = x^0 y^n \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = 1$$

اشتقاق الدالة التركيبية - قاعدة السلسلة (Chain Rule)

اذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق فان $u = g(x)$ فان الدالة التركيبية $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$ تكون قابلة للاشتقاق ويكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x))\,g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

البرهان: نفرض ان $g(x+\Delta x) - g(x) \neq 0$ لتسهيل البرهان

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x) - g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(g(x))\,g'(x)$$

مثال: اوجد y' اذا كانت $y = \frac{1}{(x^3+1)^5}$

الحل/ لنفرض ان $u = x^3 + 1$ اذا $y = \frac{1}{u^5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^5}\right) \cdot \frac{d}{dx}(x^3+1)$$

$$= -\frac{5}{u^6} \cdot 3x^2 = \frac{-5}{(x^3+1)^6}\, 3x^2 = \frac{-15x^2}{(x^3+1)^6}$$

القاعدة العامة للأس

اذا كانت $u(x)$ دالة في x قابلة للاشتقاق وكان n عدد صحيحا فان

$$\frac{d}{du} u^n = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

البرهان: اذا كانت $y = u^n$ و u دالة في x فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

وذلك باستخدام قاعدة السلسلة

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du^n}{dx} = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

(1)

مثال: اذا كان $f(x)=(x^2-5)^4$ اوجد $f'(x)$

الحل/

$$f'(x)=4(x^2-5)^3\cdot\frac{d}{dx}(x^2-5)$$

$$=4(x^2-5)^3(2x)=8x(x^2-5)^3$$

المشتقة الاولى لدالة القوى

لتكن $y=x^r$ حيث r اي عدد قياسي نسبي

$$\frac{dy}{dx}=rx^{r-1}$$

مثال: اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y=x^{\frac{1}{5}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}$$

مثال: اذا كان $s=(t^3+2t+3)^{\frac{11}{9}}$ اوجد $\frac{ds}{dt}$

الحل/ نفترض ان $u=t^3+2t+3$ ومن ذلك نجد ان $s=u^{\frac{11}{9}}$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{du}\cdot\frac{du}{dt}=\frac{11}{9}u^{\frac{11}{9}-1}(3t^2+2)$$

$$=\frac{11}{9}(3t^2+2)(t^3+2t+3)^{\frac{2}{9}}$$

14 محاضرة

التكامل - التكامل هي العملية العكسية للتفاضل.

تعريف:. اذا كانت f معرفة على $[a,b]$ واذا وجدت دالة F حيث F متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b) و $F'(x)=f(x)$ فإن F تسمى العلاقة العكسية لتفاضل الداله f او تكامل f غير المحدد ويرمز له بالرمز

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

وتقرأ F هو تكامل الداله f بالنسبة للمتغير x .

التكامل ← محدد / غير محدد

يعمل على ايجاد المساحة ويعمل في مجالات الكهرومغناطيسية حساب طول خط للداله لو حساب مجموع ....

$$\begin{tikzcd} f(x)=x^2 \arrow[r] & f'(x)=2x \arrow[l, bend left, "\text{تكامل}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, "\text{مشتقة}"] & f'(x) \arrow[l, bend left, "\text{تكامل}"] \end{tikzcd}$$

$$x^2 \xrightarrow{\text{مشتقة}} 2x+0$$

$$x^2+5 \longrightarrow 2x+0$$

$$x^2-3 \longrightarrow 2x+0$$

$$x^2+3\tfrac{1}{2} \longrightarrow 2x+0$$

التكامل

x^2+C اي بصورة عامة

Ex $f(x) = x^3$

$$F(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

اي يعني اخر ماهي الدالة التي اذا اشتقيتها ترجع x^3

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$$

Ex $g(x) = -x^7$

$$G(x) = \int -x^7 dx = -\frac{x^8}{8}$$

اي ان بصورة عامة اذا كانت

$f(x) = x^n$ حيث ان $n \neq -1$ فان

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

(1)

(2) تكامل لدالة مضروبة بعدد ثابت

$$(K f(x))' = K f'(x)$$

في المشتقة

$$\int K f(x) = K \int f(x) dx$$

Ex $\int 5x^4 dx = 5 \int x^4 dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} + c = x^5 + c$

Ex $\int -7 x^{2\frac{1}{2}} dx = -7 \frac{x^{3\frac{1}{2}}}{3\frac{1}{2}} = -2 x^{3\frac{1}{2}} + c$

٣- تكامل جمع وطرح دوال.
في الاشتقاق

$$\left(f(x) \mp g(x)\right)' = f'(x) \mp g'(x)$$

$$\int \left(f(x) \mp g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx \mp \int g(x)\,dx$$

Ex $$\int (x^7 + 2x^5)\,dx = \int x^7\,dx + \int 2x^5\,dx = \frac{x^8}{8} + 2\frac{x^6}{6} + c$$

Ex $$\int (7x^{5\frac{1}{4}} - 3x^8)\,dx = 7\,\frac{x^{6\frac{1}{4}}}{6\frac{1}{4}} - 3\,\frac{x^9}{9} + c$$

٤- $\int (ax+b)^n\,dx$

$$\left((ax+b)^n\right)' = n(ax+b)^{n-1} \cdot a$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$$

Ex $$\int (3x+5)^4\,dx = \frac{(3x+5)^5}{5 \cdot 3} + c$$

Ex $$\int \left[(-2x+7)^{5\frac{1}{2}} + 2x^3\right] dx = \frac{(-2x+7)^{6\frac{1}{2}}}{6\frac{1}{2} \cdot (-2)} + 2\frac{x^4}{4} + c$$

٥- $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

٦- $$\int \frac{1}{x^n}\,dx = \int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$$

$, n \neq 1$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx = \int (ax+b)^{-n}\,dx = \frac{(ax+b)^{-n+1}}{(-n+1)a} + c$$ -6

Ex $$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

Ex $$\int \frac{1}{(3x+2)^3}\,dx = \int (3x+2)^{-3}\,dx = \frac{(3x+2)^{-3+1}}{(-3+1)3} + c$$

Ex $$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

Ex $$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \int (ax+b)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

Ex $$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \int (2x-3)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

تكامل الدوال الهندسية

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c$$

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c$$

تذكير بالاشتقاق

$$(\sin(x))' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$$

$$(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$$

التكامل لدالة كسرية

Ex $\int \frac{x^4-3x^3+8}{x-2}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} x^4-3x^3+8 & x-2 \\ \hline x^4-2x^3 & x^3-x^2-2x-4 \\ \hline -x^3+8 & \\ -x^3+2x^2 & \\ \hline -2x^2+8 & \\ -2x^2+4x & \\ \hline -4x+8 & \\ -4x+8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$= \int (x^3-x^2-2x-4)\,dx$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 4x + C$

Ex $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} 12x^3-11x^2+6x-1 & 4x-1 \\ \hline & 3x^2-2\frac{1}{4}x+\frac{15}{16} \end{array}$$

$\frac{1}{16}$

الباقي

$= \int \left(\left(3x^2-2\frac{1}{4}x+\frac{15}{16}\right) + \frac{1/16}{4x-1} \right) dx$

التكامل بطريقة التعويض:

$u = x^2$

$du = 2x\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$u = x^4$

$du = 4x^3\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$

نعتمد في الحالات التالية على الاشتقاق

$$f^{n}(x).f'(x) \quad \text{او} \quad \frac{f'(x)}{f^{n}(x)} \quad \text{او} \quad \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$$

Ex $f(x)=(x^4+1)^2 x^3$

$\int (x^4+1)^2 x^3\,dx$ Let $u=x^4+1$

$du=4x^3\,dx$

$\int u^2 x^3 \frac{du}{4x^3}$ $\therefore dx=\frac{du}{4x^3}$

$$=\int \frac{u^2}{4}\,du=\frac{1}{4}\frac{u^3}{3}+c=\frac{1}{2}(x^4+1)^3+c$$

ملاحظة

$$f^{n}(x)$$

المشتقة تكامل

$$n f^{n-1}(x)\, f'(x)$$

Ex $\int \frac{4x^4+24x^3+36x^2-14x-42}{2x+6}\,dx$

Ex التكامل المحدد

$$F(x)=\int_3^4 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+c\,\Big|_3^4$$

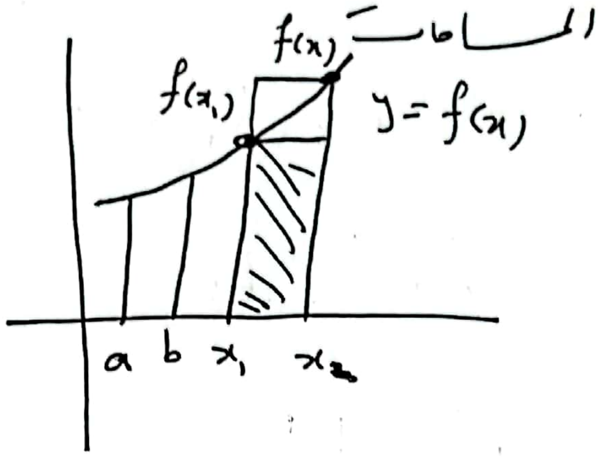
$$=\left(\frac{4^3}{3}+c\right)-\left(\frac{3^3}{3}+c\right)=\frac{64}{3}+c-\frac{27}{3}-c$$

Ex $\int_9^{25}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{x}\,\Big|_9^{25}=\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$

Ex $$\int_{-1}^{1}(x^3-2x+3)\,dx = \frac{x^4}{4}-\frac{2x^2}{2}+3x\Big|_{-1}^{1}$$

$S(x)$ المساحة من a الى x

$S(x_1)$ المساحة من a الى x_1



$$f(x_1)(x-x_1) \le S(x)-S(x_1) \le f(x)(x-x_1)$$

نقسم على $(x-x_1)$

$$f(x_1) \le \frac{S(x)-S(x_1)}{x-x_1} \le f(x)$$

عندما $x \to x_1$

$$f(x_1) \le S'(x_1) \le f(x_1)$$

$$S'(x_1) = f(x_1)$$

حيث ان x_1 نقطة اختيارية

$$S'(x) = f(x)$$

$$S(x) = \int f(x)\,dx$$

$$S(x) = F(x) + c$$

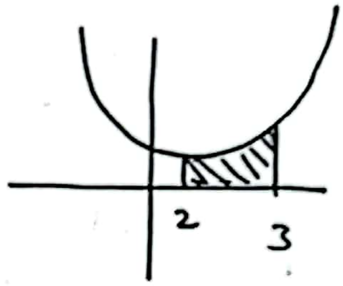
$$S(a) = F(a) + c \Rightarrow S(a) = 0 \Rightarrow c = -F(a)$$

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

$$S(b) = F(b) - F(a) \Rightarrow \underset{[a,b]}{S} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

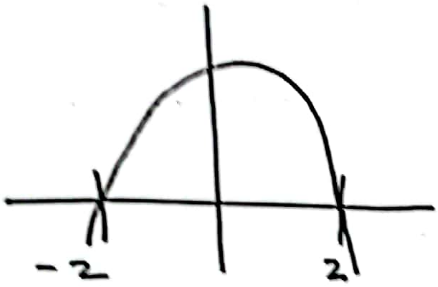
$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

المساحة المحصورة تحت الداله من النقطه a الى b .



Ex $\int_2^3 (x^2+2)\,dx = \frac{x^3}{3} + 2x \Big|_2^3$

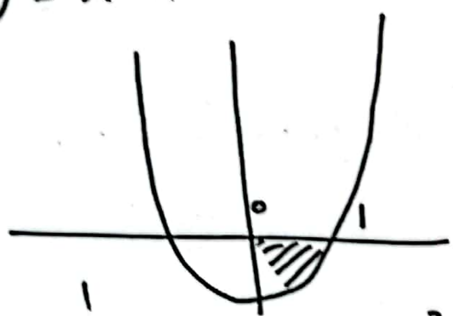
Ex $y = -x^2 + 4$



$$S = \int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,dx = \frac{-x^3}{3} + 4x \Big|_{-2}^{2}$$

Let $y=0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$

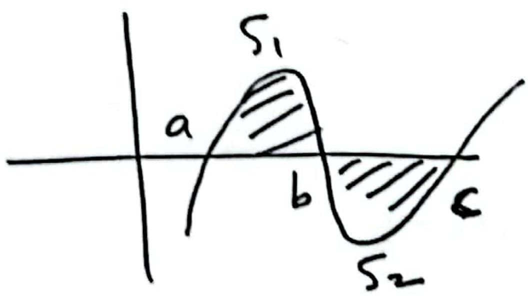
Ex $y = x^2 - 1$



$$S = \int_0^1 (x^2-1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x \Big|_0^1 = -\frac{2}{3}$$

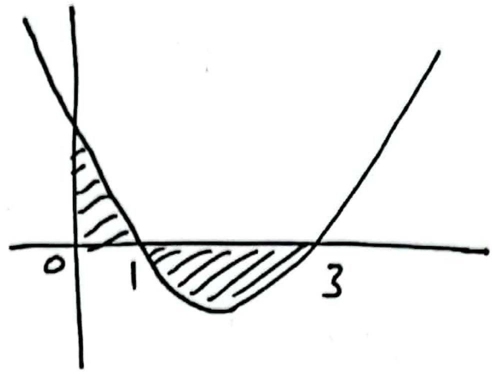
نأخذ المطلق $\frac{2}{3}$

Ex



$S_1 + S_2$

EX $y = x^2 - 4x + 3$



نظرية : اذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على $[a,b]$ واذا كانت

أ) f دالة زوجية فان
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ب) f دالة فردية فان
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

مثال:
$$\int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2\int_{0}^{2} x^2\,dx = 2\,\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2}$$

مثال:
$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx$$

حيث ان $f(x)=x^3$ دالة فردية

فان
$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = 0$$

حيث ان نصف المساحة تقع تحت محور السينات ونصفها الاخر فوق محور السينات.

Ex $\int_{-1}^{1}(x-x^3)\,dx$

بما ان $f(x)$ دالة فردية

$$\int_{-1}^{1}(x-x^3)\,dx=0$$

Ex اوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y=x^2+3x$

ومحور السينات .

الحل) الدالة ليست دالة زوجية, ليست دالة فردية .

نحاول ايجاد نقطة التقاطع مع محور السينات وذلك بعوض $y=0$

$x^2+3x=0 \Rightarrow x(x+3)=0$

$x=0$ او $x=-3$

$$\int_{-3}^{0}(x^2+3x)\,dx=-\int_{0}^{-3}(x^2+3x)\,dx=-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{-3}=-\frac{9}{2}$$

الاشارة السالبة هنا تدل على ان المساحة المطلوبة تقع تحت محور السينات .