٣- المصفوفات MATRICES

تعتبر المصفوفات لغة رياضية قوية وموجزة. فالعلاقات التي تحتاج عادة إلى عدد كبير من الرموز والأرقام يمكن التعبير عنها بإيجاز ووضوح باستخدام المصفوفات. والمصفوفة عبارة عن مجموعة من الكميات التي عددها $m\times n$ مرتبة في تشكيل يحتوى على m من الصفوف وn من الأعمدة. وتختلف المصفوفة عن المحددة في شكلها بأن يوضع تشكيل المصفوفة عادة بين قوسين مربعين (أو مستديرين) ويعبر عن المصفوفة بحرف واحد كبير A , B , C وأحياناً بالرمز Δ فمثلاً

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

وتسمى الكميات a_{ik} المكونة للمصفوفة بعناصر المصفوفة حيث i عدد الصفوف و k عدد الأعمدة وتسمى المصفوفة التى تحتوى على صفوف عددها m وأعمدة عددها n بمصفوفة ذات رتبة $(m\times n)$ وإذا كانت $m=n$ فإن المصفوفة تكون مربعة ولا توجد للمصفوفات أى قيمة جبرية بعكس المحددات.

٣-١ العمليات الجبرية للمصفوفات: Matrices Algebra

٣-١-١ جمع و طرح المصفوفات: Matrices addition and subtraction

يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح للمصفوفات التي لها نفس الرتبة أي لها نفس العدد من الصفوف ونفس العدد من الأعمدة. فإذا كانت A , B مصفوفتان من نفس الرتبة فإن مجموع هاتين المصفوفتين يعرف بأنه يساوى المصفوفة C التي لها نفس الرتبة وكل عنصر من عناصرها يساوى مجموع العنصرين المتناظرين في A , B.

مثال (١-٣): إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore C = A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+6 & 1+5 \\ 3+2 & 0+2 & 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

وكل مصفوفتان لهما نفس الرتبة قابلتان للجمع والطرح ويعرف طرح المصفوفتين بنفس الطريقة إذ أن الفرق بين المصفوفتين A , B من نفس الرتبة هو المصفوفة D من نفس الرتبة أيضاً، وكل عنصر من عناصرها يساوى عنصر المصفوفة A مطروحاً منه العنصر المقابل في المصفوفة B ، فمثلاً في المثال السابق:

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 1-3 & -2-6 & 1-5 \\ 3-2 & 0-2 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -4 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

ومن التعريف يمكن إثبات أن مجموع المصفوفات له الخصائص التالية:

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

وإذا كانت المصفوفة B هي حاصل جمع عدد من m من المصفوفات A فإن B = mA وكل عنصر من عناصر المصفوفة B يساوى m مضروبة في العنصر المقابل في المصفوفة A.

مثال (٢-٣):

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ومن هذا المثال يتضح الآتي:

١- تتساوى المصفوفتان B , A إذا تساوت رتبتاهما وتكون جميع عناصر كل منهما المتناظرة متساوية.
٢- حاصل ضرب مصفوفة A في عدد m حقيقي أو تخيلي (مقدار قياسي أو مقدار ثابت) هو مصفوفة B عناصرها عبارة عن حاصل ضرب كل عنصر من عناصر A فى m. فمثلاً إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ mA = \begin{pmatrix} m & 3m & 2m \\ 2m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

وجدير بالملاحظة أن ضرب المصفوفة في عدد يخضع لقانون التوزيع وقانون التبادل في علم الجبر ويكون: $m\,(A \pm B) = mA \pm mB$

وكذلك: $mA = Am$

بشرط أن تكون m عدد وليست مصفوفة أخرى مثلاً.
وهذا ما يسمى بالضرب في قياسي **Scalar Multiplication**.

٣-١-٢ ضرب المصفوفات:

إذا كانت هناك مصفوفتان A, B فإنهما تكونان قابلتين للضرب إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة اليسرى A مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة اليمنى B . فعلى سبيل المثال، المصفوفتين A , B رتبتاهما (2 x2) , (3 x 2) على الترتيب وتتكون من:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

حاصل الضرب C = AB هو مصفوفة رتبتها (3 x 2) تعرف كالآتي:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

أي أن المصفوفة الناتجة لها عدد من الصفوف يساوى عدد صفوف المصفوفة الأولى A وعدد من الأعمدة يساوى عدد أعمدة المصفوفة الثانية B ويكون كل عنصر من عناصر المصفوفة C وليكن C_{ik} (أى الواقع في الصف رقم I والعمود رقم k) مساوياً لمجموع حواصل ضرب عناصر الصف رقم I في المصفوفة اليسرى A في عناصر العمود رقم k من المصفوفة اليمنى B فى نظيره.

مثال (٣-٣): إوجد حاصل ضرب المصفوفتين:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

الحـــل

$$C = A \times B$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times 2+3\times 4+(-1\times 5) & 2\times 1+3\times -2+(-1\times -3) \\ 4\times 2+1\times 4+2\times 5 & 4\times 1+1\times -2+2\times -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 22 & -4 \end{pmatrix}$$

مثال (٣-٤): إذا أخذنا:

$$A_{(2\times 3)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B_{(3\times 2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

فإن المصفوفة A قابلة للضرب فى المصفوفة B ويعطى حاصل الضرب C = AB من:

$$C_{(2\times2)}=\begin{pmatrix}3\times1+1\times3+2\times2 & 3\times2+1\times1+2\times3\\ 2\times1+1\times3+3\times2 & 2\times2+1\times1+3\times3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10 & 13\\ 11 & 14\end{pmatrix}$$

ومن جهة أخرى فإن المصفوفة B قابلة للضرب فى المصفوفة A ويعطى حاصل الضرب D = BA من:

$$D_{(3\times3)}=\begin{pmatrix}1\times3+2\times2 & 1\times1+2\times1 & 1\times2+2\times3\\ 3\times3+1\times2 & 3\times1+1\times1 & 3\times2+1\times3\\ 2\times3+3\times2 & 2\times1+3\times1 & 2\times2+3\times3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 3 & 8\\ 11 & 4 & 9\\ 12 & 5 & 13\end{pmatrix}$$

ومن هذا يتضح أن $AB \neq BA$ أي أن قانون التبادل لا يصلح للمصفوفات حتى لو كانت رتبة مصفوفة حاصل ضرب A×B تساوى رتبة مصفوفة حاصل ضرب $B\times A$.

وضرب المصفوفات له الخصائص التالية:

$(1)\ A(B+C)=AB+AC$

$(2)\ (A+B)C=AC+BC$

$(3)\ A(BC)=AB(C)$

وعموماً يمكن إثبات أن: $AB \neq BA\ ,\ ABC \neq BAC$

وإذا كانت $AB = AC$ فهذا لا يعنى أن $B = C$. وإذا كانت $AB = 0$ فلا يعنى هذا أن $B = 0$ أو $A = 0$

٣-٢ أثر المصفوفة: Trace of a Matrix

إذا وجدت مصفوفة مربعة A(nxn) فإن أثر هذه المصفوفة يعرف بأنه مجموع العناصر القطرية في المصفوفة المربعة، فمثلاً:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 12 \\ 3 & 6 & -5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\because \; trace\; A = tr\; A = \sum_{i-1}^{n} a_{ii}$$

$$\therefore \; tr\; A = -2 + 6 + 4 = 8$$

ويحقق الأثر الخواص الآتية:

$$tr\,(A+B) = tr\; A + tr\; B$$

$$tr\; CA \qquad = C\; tr\; A$$

$$tr\,(AB) \qquad = tr\,(BA)$$

$$tr\,(A) \qquad = tr\; A_T$$

$$tr\; I_n \qquad = n$$

$$tr\,(IA) \qquad = tr\,(A)$$

٣-٣ بعض المصفوفات الخاصة:

٣-٣-١ مصفوفة الصف: Row Matrix

المصفوفة التي لها صف واحد يطلق عليها مصفوفة ذات الصف الواحد وتسمى في بعض الأحيان بالمتجه الصفي Row Vector ويرمز لهذه المصفوفة بالرمز (A) ورتبتها (1 x n) فمثال ذلك:

$$(A)_{1\times 3} = (3 \quad 6 \quad 5)$$

٣-٣-٢ مصفوفة العمود: Column Matrix

المصفوفة التي لها العمود الواحد يطلق عليها مصفوفة ذات العمود الواحد وتسمى في بعض الأحيان بالمتجه العمودي Column Vector ويرمز لهذه المصفوفة بالرمز [A] ورتبتها (m x 1) فمثال ذلك:

$$[A]_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

٣-٣-٣ المصفوفة المربعة: Squared Matrix

وهى مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة مثل المصفوفة التالية:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

٣-٣-٤ المصفوفة القطرية: Diagonal Matrix

هي المصفوفة المربعة التي فيها كل العناصر تساوى صفر ما عدا عناصر القطر الأساسي وهو (المار بأعلى عنصر من اليسار إلى أسفل عنصر من اليمين (a_{11} , a_{22} , a_{33} , ...a_{mn}) مثل المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ومن الواضح أن أي مصفوفتين مربعتين تقبلان الضرب في بعضهما إذا كانتا من نفس الرتبة. كذلك فإن أي مصفوفتين قطريتين تقبلان الضرب في بعضهما وتخضعان لقانون التبادل أي أن AB =BA.

٥-٣-٣ المصفوفة القياسية ومصفوفة الوحدة: Scalar and Unit Matrix

المصفوفة القطرية التي يكون مجموع عناصر قطرها الرئيسي متساوية تسمى المصفوفة القياسية Scalar matrix وإذا كانت عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة القياسية تساوى الواحد الصحيح تسمى هذه المصفوفة بمصفوفة الوحدة Unit matrix ويرمز لها بالرمز I_n حيث (n x n) هى رتبة المصفوفة، فمثلاً:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وبوجه عام إذا كانت A مصفوفة مربعة رتبتها $I_{(m \times m)}$ هي مصفوفة الوحدة بنفس الرتبة فإن:

$$IA = AI = A$$

$$I = I^2 = I^3 = ...= I^k$$

حيث k عدد صحيح موجب ويمكن إثبات ذلك بسهولة.

فبضرب أي مصفوفة A في مصفوفة الوحدة تبقى المصفوفة A كما هي بدون تغيير بفرض قابلية ضرب المصفوفتين حسب قانون ضرب المصفوفات السابق، فمثلاً:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

كذلك إذا كانت:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore IA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\3&0&1\end{pmatrix}=A$$

$$\therefore AI=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\3&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\3&0&1\end{pmatrix}=A$$

٣-٣-٦ محدد المصفوفة: Determinant of the Matrix

لكل مصفوفة مربعة محددة خاصة بها ويرمز لها بالرمز $|A|$ فمثلاً إذا كانت:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\qquad \therefore |A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=-2$$

وتسمى المصفوفة المربعة التى محددتها تساوى صفراً بالمصفوفة الشاذة.

ويحقق محدد المصفوفة الخواص التالية:

إذا كان A , B مصفوفتان مربعتان وقابلتان للضرب فإن:

١) $|AB|=|A|.|B|$

٢) $|A_T|=|A|$

٣) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

حيث A^{-1} هو مقلوب أو معكوس المصفوفة كما سيعرف فيما بعد.

٤) $|cA| = c^n.|A|$

حيث c مقدار ثابت، cA هو المصفوفة الناتجة من ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة A في المقدار الثابت c كما يلي:

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & ca_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & ca_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\therefore |cA| = c \times c \times c \ldots\ldots \times c.|A| = c^n.|A|$$

٣-٣-٧ مدور المصفوفة أو المصفوفة البديلة: The transposed matrix

إذا استبدلت الصفوف بالأعمدة فى مصفوفة $A_{(m \times n)}$ فإن المصفوفة الجديدة تسمى مدور المصفوفة أو المصفوفة البديلة ويرمز لها بالرمز $A_{(n \times m)}$ أو A_T أو $A^/$ ، فإذا كانت مصفوفة رتبتها (3 x 2) تكون كالآتي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

وتكون المصفوفة البديلة لهذه المصفوفة ويرمز لها بالرمز A_T كالتالي:

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

ومن الواضح أن المصفوفة البديلة لمصفوفة العمود [A] هي مصفوفة الصف (A). فمثلاً إذا كانت:

$$[A]=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\therefore [A]_T=(a_1 \quad a_2 \quad a_3)=(A)$$

وكذلك فإن المصفوفة البديلة لمصفوفة الصف (A) هي مصفوفة العمود [A] أي أن:

$$(A)_T=[A]$$

$$[A]_T.[A]=(A).(A)_T=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

ويتضح بوجه عام أنه إذا كانت A مصفوفة رتبتها (m x n) فإن رتبة المصفوفة A_T هى (n x m) لذلك تقبل كل منهما الضرب مع الأخرى أى يمكن إيجاد حاصل ضرب $A_T\ A$, $A\ A_T$ وتختلف رتبة حاصل الضرب $A\ A_T$ عن رتبة حاصل الضرب $A_T\ A$ إلا إذا كانت A مصفوفة مربعة.

ويمكن إثبات أن المصفوفة البديلة لها الخصائص الآتية:

$$(1)\ (A)_T=A \qquad (2)\ (A+B)_T=A_T+B_T$$

$$(3)\ (nA)_T=n.A_T \qquad (4)\ (AB)_T=B_T.A_T$$

$$(5)\ (ABC)_T=C_T.B_T.A_T$$

هكذا لأى عدد محدد من المصفوفات. فعلى سبيل المثال إذا كانت:

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$\therefore A_T=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\ ,\ B_T=(2 \quad 1)$$

$$\therefore A.B=\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}\ ,\ B_T.A_T=(5 \quad 8)$$

$$\therefore (AB)_T=B_T.A_T$$

٣-٣-٨ المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة:

Symmetric and Skew Symmetric Matrix

إذا كانت A مصفوفة مربعة وتحقق الشرط $A = A_T$ فإنها تسمى متماثلة Symmetric آي أن المصفوفة الأصلية تساوى مدور المصفوفة، فمثلاً:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \end{pmatrix} = A_T$$

مصفوفة متماثلة ونلاحظ أن العناصر التي تقع أعلى القطر دائماً تساوى العناصر التي تقع أسفل القطر في المصفوفة المتماثلة.

وتكون المصفوفة A شبه متماثلة إذا كانت $A = A_T$ أي أن المصفوفة تساوى المصفوفة البديلة بعد ضربها في (1-)، وفى هذه الحالة يمكن بسهولة إثبات أن العناصر القطرية فى المصفوفة شبه المتماثلة تساوى صفر. فالعناصر القطرية a_{ii} لكي تحقق شرط أنها شبه متماثلة فإن $a_{ii} = -a_{ii}$ وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت $a_{ii} = 0$ وفيما يلي مثال لمصفوفة شبه متماثلة:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & -6 \\ -8 & 6 & 0 \end{pmatrix} = -A_T$$

٣-٣-٩ المصفوفة المرتبطة: The Adjoint Matrix

إذا كانت A مصفوفة مربعة:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فإن المصفوفة المرتبطة للمصفوفة A هي المصفوفة البديلة لمصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز adj. A فإذا كان A_{rc} هو العامل المرافق

للعنصر a_{rc} (أي قيمة المحددة المكونة بحذف كل من الصف والعمود الذي يحتوى على العنصر a_{rc} مع أخذ الإشارة المناسبة حسب قاعدة الإشارات السابق شرحها في باب المحددات، أو بعبارة أخرى المحددة الصغرى للعنصر a_{rc} مع أخذ الإشارة المناسبة) فإن مصفوفة العوامل المرافقة B بنفس رتبة A ، وتكون:

$$Cof\left(A\right)=B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Adj\ A=\left[Cof\ \left(A\right)\right]^{t}$$

$$\therefore adj.A=B_{T}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال (٥-٣): إذا كانت:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

إوجد مصفوفة العوامل المرافقة ثم إوجد المصفوفة البديلة.

الحـــل

العامل المرافق للعنصر a11 هو المحددة:

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}=11$$

والعامل المرافق للعنصر a12 هو المحددة:

$$A_{12} = -\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = -7$$

و هكذا....

وبذلك نحصل على مصفوفة العوامل المرافقة B ونجد أن:

$$B = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore adj.A = B_T = \begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

٣-٣-١٠ مقلوب المصفوفة: The inverse matrix

يتكون مقلوب المصفوفة من المرافق التقليدي لها من العلاقة

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

ويمكن إثبات هذه العلاقة بعد إيجاد حاصل ضرب A. (Adj. A) حيث ينتج أن:

$$A \times (Adj\ \ A)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A.(Adj\ \ A) = |A|.I}$$

$$\because |\mathbf{A}| \neq \mathbf{0}$$

$$\therefore \mathbf{A}\left[\frac{\mathbf{Adj\ \ A}}{|\mathbf{A}|}\right] = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A^{-1}.A}\left[\frac{\mathbf{Adj\ \ A}}{|\mathbf{A}|}\right] = \mathbf{I.A^{-1}}$$

$$\mathbf{I}\left[\frac{\mathbf{Adj\ \ A}}{|\mathbf{A}|}\right] = \mathbf{I.A^{-1}}$$

$$\therefore \mathbf{A^{-1}} = \left[\frac{\mathbf{Adj\ \ A}}{|\mathbf{A}|}\right]$$

وتكون المصفوفة قابلة للقلب إذا كان محددها لا يساوى صفراً، ويقال لمصفوفة مربعة A أنها قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة C تحقق الخاصية AC=CA=I حيث I هي مصفوفة الوحدة التي لها نفس رتبة كل من A,C وتسمى المصفوفة C مقلوب A ويرمز لها بالرمز A^{-1} وهذه العلاقة متماثلة. أي أنه إذا كانت C مقلوب A فإن A مقلوب C أي أن $A.\ A^{-1}= A^{-1}.A=I$.

مثال (٦-٣): إوجد قيمة A^{-1} إذا كانت: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&5&12\end{pmatrix}$

الحـــل

حسب المثال السابق فإن:

$$adj\ A=\begin{pmatrix}11&-9&1\\-7&9&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}$$

$$|A|=11-2\times7+3\times2=3\neq0$$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{adj\ A}{|A|}=\begin{pmatrix}11/3&-9/3&1/3\\-7/3&9/3&-2/3\\2/3&-3/3&1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11/3&-3&1/3\\-7/3&3&-2/3\\2/3&-1&1/3\end{pmatrix}$$

٣-٤ تجزئة المصفوفات: Partitioning of Matrices

من البديهي أنه كلما كان عدد الصفوف وعدد الأعمدة في المصفوفة صغير، فإن التعامل مع المصفوفة يكون أكثر يسراً، فلذا فإننا نلجأ إلى تجزئة المصفوفات حتى يسهل التعامل معها عددياً سواء عند إجراء عملية الضرب أو إيجاد المعكوس أو أية عمليات جبرية أخرى على المصفوفات.

فمثلاً المصفوفة التالية:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

يمكن تجزئتها على النحو التالي:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

أيضاً يمكن كتابتها فى الصورة:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

وفى الصورة العامة يمكن كتابة المصفوفة التي أبعادها $(m \;\; x \;\; n)$ في شكل مصفوفة مجزئة كالتالي:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

والمصفوفة الجزئية Aij لها r_i من الصفوف، c_j من الأعمدة ومن الواضح أن جميع المصفوفات الجزئية الواقعة فى نفس الصف يكون لها نفس العدد من الصفوف، وبالمثل المصفوفات الجزئية الواقعة في نفس العمود يكون لها نفس عدد الأعمدة.

العمليات الجبرية على المصفوفات المقسمة إلى مصفوفات جزئية (قوالب) مشابهة إلى حد كبير العمليات الأصلية على المصفوفات.

فبالنسبة لعملية الجمع: إذا كان A , B مصفوفتان لهما نفس عدد الأعمدة وعدد الصفوف كذلك المصفوفات المناظرة لها نفس عدد الصفوف وعدد الأعمدة

أي أن A,B مقسمتين بنفس الكيفية فإنه يمكن إجراء عملية الجمع كالمعتاد وذلك بجمع العناصر المتناظرة في كل من المصفوفات الجزئية المتناظرة، أى أن:

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \dots\dots\dots & A_{1n}+B_{1n} \\ A_{m1}+B_{m1} & A_{m2}+B_{m2} & \dots\dots\dots & A_{mn}+B_{mn} \end{pmatrix}$$

وفى عملية التدوير (transpose) فإننا يجب أن نأخذ في الاعتبار تبادل الصفوف والأعمدة في المصفوفة A وتبادل الصفوف والأعمدة في المصفوفات الجزئية أيضاً، فمثلاً في المعادلة (1):

$$A==\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

ويكون مقلوب المصفوفة كالتالي:

$$A_T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}$$

أما بالنسبة لعملية الضرب Multiplication بالنسبة لمصفوفتين فإننا يجب أن نأخذ في الاعتبار قابلية الضرب للمصفوفة A في المصفوفة B (أي أن أعمدة A يساوى عدد صفوف B) وكذلك قابلية أو انسجام عمليات الضرب للمصفوفات المجزئة أيضاً، أي أنه إذا كان أعمدة المصفوفات الجزئية في A هي على الترتيب c_1 , c_2 ,......, c_n فيجب أن يكون عدد صفوف المصفوفات الجزئية المناظرة فى B هو c_1 , c_2 ,......, c_n أيضاً، فمثلاً:

$$A_{(m\times p)}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad B_{(p\times n)}=\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}$$

فإن عدد أعمدة A_{11} يساوى عدد صفوف B_{11}، عدد أعمدة A_{12} يساوى عدد صفوف B_{21} في هذه الحالة يجوز إجراء عملية الضرب و يكون الناتج في الصورة:

$$AB_{(m\times n)} = \begin{pmatrix} A_{11}.B_{11} + A_{12}.B_{21} \\ A_{21}.B_{11} + A_{22}.B_{21} \end{pmatrix}$$

مثال (٧-٣): إذا كان:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

فيكون حاصل الضرب هو:

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}.B_{11} + A_{12}.B_{12} & A_{11}.B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}.B_{11} + A_{22}.B_{21} & A_{21}.B_{12} + A_{22}.B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

وبحساب كل من C_{22} , C_{21} , C_{12} , C_{11} ينتج حاصل الضرب وهو المصفوفة C.

نحسب أولا C_{11}:

$$C_{11} = A_{11}.B_{11} + A_{12}.B_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

وبنفس الكيفية يمكن حساب باقي المصفوفات الجزئية، ويكون الناتج فى الصورة:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 12 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ 0 & -12 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ -9 & -2 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

مثال (٨-٣): إوجد حاصل الضرب التالي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

مثال (٩-٣): بفرض أن القوالب في المثال الآتي مناسبة للضرب من ثم:

$$(i)\quad A(P\ Q)=(AP\ .\ AQ) \qquad\qquad (ii)\ \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} PB \\ QB \end{bmatrix}$$

$$(iii)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} AL+BM \\ CL+DM \end{pmatrix}$$

$$(vi)\ (A_1 \quad ... \quad A_n)\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}=A_1B_1+\cdots+A_nB_n$$

$$(v)\ \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}(B_1 \quad \cdots \quad B_n)=\begin{pmatrix} A_1B_1 & \cdots & A_1B_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_nB_1 & \cdots & A_nB_n \end{pmatrix}$$

مثال (١٠-٣): اوجد معكوس المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} N & L \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

حيث N , M مصفوفات مربعة قابلة للعكس.

<u>الحــل</u>

نفرض أن A^{-1} على الصورة:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} R & P \\ K & H \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1}=\begin{bmatrix} NR+LK & NP+LH \\ MK & MH \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MH=1 \qquad \therefore H=M^{-1}$$

$$MK=0 \qquad \therefore K=o$$

$$NR=1 \qquad \therefore R=N^{-1}$$

$$NP+LM^{-1}=0 \qquad \therefore P=-N^{-1}.LM^{-1}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix} N^{-1} & -N^{-1}.LM^{-1} \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$$

٣-٥ حل المعادلات باستخدام المصفوفات:

إذا كـان لـدينا مجموعـة عـددها (n) مـن المعـادلات الآتيـة فـي عـدد مـن المجاهيل يساوى (n) وهو نفس عدد المعادلات أيضاً. أى أن:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+.........+a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+.........+a_{2n}x_n=b_2$$

$$.....................................$$

$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+.........+a_{nn}x_n=b_n$$

حيث المعاملات a_{in},b_i كميات ثابتة:

فإنه يمكن كتابة المعادلات السابقة على صورة مصفوفات كالآتي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & .... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ .... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ .... \\ b_n \end{bmatrix}$$

أي: $A \,.\, [x] = [b]$

حيث A هي عبارة عن مصفوفة المعاملات

x هي متجه مكون من عمود واحد خاص بالمجاهيل

b هي متجه من عمود واحد خاص بالثوابت.

فإذا كانت $A \neq 0$ أي أن مصفوفة المعاملات A غير شاذة فإنه يضرب الطرفين فى A^{-1} يكون $A^{-1}.A[x] = A^{-1}[b]$

ونظراً لأن $A^{-1} \,.\, A = I$ فإن:

$$\therefore\ I[x] = A^{-1}[b] = \frac{adj.A}{|A|}[b]$$

$$\therefore\ [x] = \frac{adj.A}{|A|}[b]$$

$$\therefore\ i.e \quad X = A^{-1}.B$$

وهو حل المعادلة المصفوفية: $A \,.\, [x] = [b]$

مثال (١٠-٣): حل المعادلات الآتية:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -2$$

$$-2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0$$

<u>الحـــل</u>

تكتب المعادلات على الصورة: $A \,.\, [x] = [b]$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix},[x]=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},[b]=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

ولحساب محدد المصفوفة نجد أن:

$$A=1\times(-25+28)-2\times(-10+14)+3\times(-8+10)$$

$$=3-8+6=1\neq 0$$

أى أن مصفوفة المعاملات لا تساوى الصفر أي أنـها غير شاذة.

باستخدام الحل:

$$X=A^{-1}.B$$

$$\therefore [x]=\frac{adj.A}{|A|}[b]$$

$$adj.A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore [x]=\frac{\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}}{1}\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\therefore x_1=1\quad,\quad x_2=2\quad,\quad x_3=-2$$